En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°; demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

21. $\csc 45° = \dfrac{1}{sen\,45^0}$

22. $\sec^2 60° - \tan^2 60° = 1$

23. $\sec 30° = \csc 60^0$

24. $sen\ 30° \cos 60° + sen\ 60° \cos 30° = 1$

25. $\cot 60° = \dfrac{\cos 60°}{sen\,60°}$

26. $\cos 30° \cos 60° - sen\ 30°\ sen\ 60° = 0$

27. $\tan 45° = \dfrac{sen\,45°}{\cos 45°}$

28. $sen\ 60° = 2\ sen\ 30° \cos 30°$

29. $sen\ ^2 45° + \cos^2 45^0 = 1$

30. $sen\ 30° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA
SEGUNDA PARTE

Uno de los usos principales de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo" .

Un triángulo esta compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto: a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontraras ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.

5.1 Resolución de triángulos rectángulos

Objetivo:

Usar las funciones trigonométricas para encontrar datos faltantes de triángulos rectángulos y resolver problemas de aplicación que los involucren.

Supongamos, por ejemplo, que se desea sujetar un poste de 8 m. de altura por medio de un tirante de alambre sujeto a lo alto del poste y a una estaca situada a una distancia de 5 m. del pie del mismo sobre un suelo horizontal. ¿Cual deberá ser la longitud del alambre que se necesita y cual su inclinación con respecto al suelo y con respecto al poste? Este problema se resuelve con facilidad por medio de las relaciones trigonométricas anteriormente vistas.

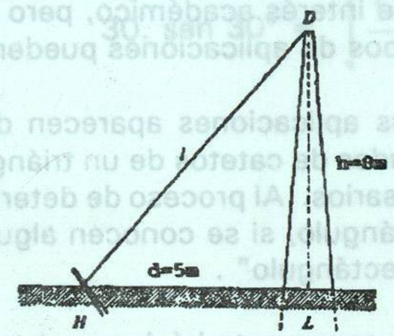


Fig. 5.1

En efecto, si DL es el poste (Fig. 5.1) y "h" su altura conocida de 8 m., "d" la distancia HL de 5 m. Desde la estaca al pie del poste, y DH representa el alambre de longitud "l" sujeto a la estaca en H; el $\triangle$DHL es un triángulo rectángulo en L en el que como sabemos, $l^2=d^2+h^2$, de donde , $l = \sqrt{d^2+h^2}$. Puesto que "d" y "h" se conocen, esta fórmula nos permite calcular inmediatamente "l".

$$l = \sqrt{d^2+h^2} = \sqrt{5^2+8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} = 9.43m$$

La inclinación del alambre con respecto al suelo es el $\angle$H, y de la definición de la función tangente, deducimos que

$$\tan H = \frac{h}{d}$$

Como conocemos "h" y "d", esta fórmula da en seguida la tangente del $\angle$H,

$$\tan H = \frac{8m}{5m} = 1.6$$

y conocida la tangente, buscamos en las tablas trigonométricas o con una calculadora el valor del ángulo de inclinación H,

$\angle H = 58°$

Una vez conocido el $\angle$H, el $\angle D = 90° - \angle H$,

$\angle D = 90° - 58° = 32°$

La longitud de "l" del alambre se pudo haber determinado también sin utilizar el teorema de Pitágoras, si primero calculamos el $\angle$H por la fórmula;

$$\tan H = \frac{h}{d}$$

que como acabamos de ver, $\angle H = 58°$ y después utilizamos la definición de la función seno del $\angle$H,

$$\operatorname{sen} H = \frac{h}{l}$$

Despejando de esta fórmula el valor de "l" se obtiene que,

$$l = \frac{h}{\operatorname{sen} H}$$

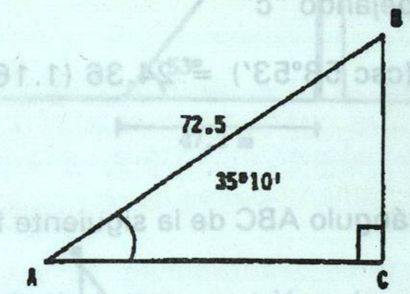
por lo tanto,

$$l = \frac{8m}{\operatorname{sen} 58°} = \frac{8}{0.8480} = 9.43m$$

De manera que eligiendo de entre las funciones trigonométricas del triángulo rectángulo aquella que involucra los datos y la incógnita, y transformándola convenientemente mediante los métodos algebraicos, tenemos a nuestra disposición ecuaciones y fórmulas que nos permiten calcular cualquier lado o ángulo de un triángulo rectángulo cuando se dan suficientes datos.

Ejemplo 1

En el $\triangle$ABC de la figura, donde $\angle A = 35°10'$ y $c = 72.5$; resuelve el



triángulo rectángulo, es decir, encuentra la medida de: a) $\angle$B, b) el lado a y c) el lado b

Solución:

a) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 35°10' = 89°60' - 35°10' = 54°50'$

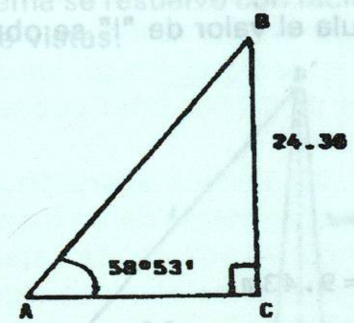
b) sen A = $\frac{a}{c}$; despejando "a" de esta fórmula,

$a = c$ (sen A) = 72.5 (sen 35°10′) = 72.5 (0.5760) = 41.8

c) cos A = $\frac{b}{c}$; despejando "b" de esta fórmula

$b = c$ (cos A) = 72.5 (cos 35°10′) = 72.5 (0.8175) = 59.3

Ejemplo 2
Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a = 24.36 y ∠A = 58°53′



Solución
a) El ∠B = 90°- ∠A = 90°-58°53′ = 89°60′-58°53′ = 31°7′

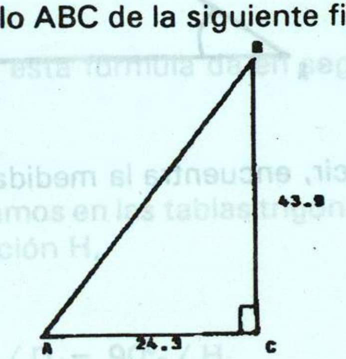
b) Para el lado "b" se utiliza la función
cot A = $\frac{b}{a}$; y despejando "b"

b = a(cot A) = 24.36 (cot 58°53′) = 24.36 (0.6036) = 14.70

c) Para el lado "c" se utiliza la función
csc A = $\frac{c}{a}$; y despejando "c"

c = a(csc A) = 24.36 (csc 58°53′) = 24.36 (1.1681) = 28.45

Ejemplo 3
Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a = 43.9 y b = 24.3



Solución
a) tan A = $\frac{a}{b} = \frac{43.9}{24.3} = 1.8066$

por lo tanto ∠A = 61°

b) ∠B = 90°- ∠A = 90°-61° = 29°

c) Para el lado "c" se utiliza la función
csc A = $\frac{c}{a}$; despejando "c", se tiene que

c = a(csc A) = 43.9 (csc 61°) = 43.9 (1.1434) = 50.2

o bien, se pudo haber utilizado la función

sen A = $\frac{a}{c}$; y despejando "c", se tiene que

$c = \frac{a}{sen\ A} = \frac{43.9}{sen\ 61^o} = \frac{43.9}{0.8746} = 50.2$

Ejemplo 4
Supón que te dan el trabajo de medir un poste de luz que esta colocado afuera de un negocio. Como es muy difícil para ti subirte para medirlo, decides medirlo desde el piso. De un punto situado a 47.3 metros del poste, encuentras que con un teodolito el ángulo del piso a la punta del poste es de 53°. (Fig. 5.2) ¿Cuál es la altura del poste?

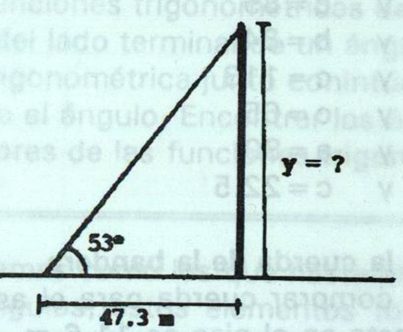


Fig. 5.2

Solución

Con la figura puedes ver que se forma un triángulo rectángulo, donde el cateto adyacente = 47.3 m y la incógnita es el cateto opuesto.

Así que con la definición de la tangente del ángulo dado tenemos:

$\tan 53^o = \frac{y}{47.3}$

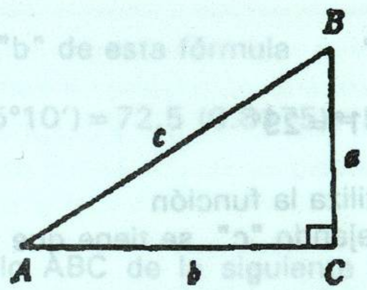
$y = 47.3 \times \tan 53^o$

$y = 47.3 \times 1.327$

$y = 62.77$ *metros*

Ejercicio 5.1

Resuelve cada uno de los siguientes triángulos rectángulos ABC;



Dados:

1. $\angle B = 36^\circ 52'$ y $c = 35$
2. $\angle A = 67^\circ 23'$ y $c = 39$
3. $\angle A = 73^\circ 44'$ y $a = 36$
4. $\angle A = 61^\circ 56'$ y $b = 32$
5. $\angle B = 12^\circ 41'$ y $b = 36$
6. $a = 180$ y $b = 33$
7. $a = 96$ y $c = 146$
8. $b = 12$ y $c = 37$
9. $\angle B = 6^\circ 44'$ y $a = 144$
10. $\angle B = 43^\circ 36'$ y $b = 20$
11. $\angle B = 11^\circ 25'$ y $c = 101$
12. $\angle A = 58^\circ 7'$ y $a = 45$
13. $\angle A = 59^\circ 29'$ y $b = 33$
14. $\angle A = 64^\circ 57'$ y $c = 85$
15. $a = 13$ y $b = 84$
16. $a = 15$ y $c = 113$
17. $b = 16$ y $c = 65$
18. $\angle B = 26^\circ$ y $a = 80$
19. $\angle B = 48^\circ 40'$ y $c = 22.5$

20. **Problema de la cuerda de la bandera.**
Si necesitas comprar cuerda para el asta de una bandera y observas que la sombra del asta en el piso es 11.6 m. y el ángulo de elevación del sol es de $35^\circ 40'$. ¿De qué tamaño debes de comprar la cuerda?

21. **Problema de la torre de observación.**
La torre más alta del mundo mide 553 m. de altura y se encuentra en Toronto, si la sombra que proyecta en el piso mide 1100 metros de longitud ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol a esa hora del día?

22. **Problema del faro de luz.**
Un observador ve desde lo alto de un faro de 60 m. de altura un barco en el agua, con un ángulo de depresión de $12^\circ 42'$ ¿Cuál será la distancia del barco a la torre?

23. **Problema de la radioterapia.**
Un tubo de rayos gamma es usado para tratar un tumor que se encuentra 5.7 cm. debajo de la piel del paciente, para no dañar un órgano que esta arriba del tumor el técnico mueve el tubo 8.3 centímetros hacia un lado. ¿Cuál será el ángulo del tubo para que los rayos peguen en el tumor? ¿Cuánto tendrá que viajar el rayo a través de la piel?

24. **Problema de la inclinación de la calle.**
Cierta persona desea saber cuál es el ángulo de inclinación de una calle. Se da cuenta que los ladrillos de una barda son horizontales con respecto a la calle y mide desde un punto, la distancia horizontal es de 35 cm. y de ahí hacia abajo el ladrillo mide 6 cm. de distancia vertical hacia la calle. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

25. **Problema del misil.**
Un observador se encuentra a 4.8 km. del lanzamiento de un misil y lo ve ascender.
    a. A un determinado tiempo, el ángulo de elevación es $30^\circ 25'$ ¿Qué tan alto está el misil? ¿Qué tan lejos esta del observador?
    b. ¿Cuál será el ángulo de elevación cuando el misil alcance 30 km. de altura?

5.2 Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Objetivo:

> Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, dado: a) un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal o b) el valor de una función trigonométrica junto coninformación sobre el cuadrante en el que se localiza el ángulo. Encontrar los ángulos de referencia y usárlos para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 90°

En determinados tipos de problemas como los que hasta ahora hemos estudiado, en los que intervienen rectas y ángulos, estos elementos forman parte de triángulos rectángulos. Pero no siempre es éste el caso y,como veremos en el otro capítulo, es necesario muchas veces resolver triángulos oblicuángulos.

En los triángulos rectángulos los ángulos cuyas funciones trigonométricas hemos utilizado en los cálculos son siempre agudos. Sin embargo, en los triángulos oblicuángulos hay que operar con ángulos obtusos. Se presenta, pues, la necesidad de retomar el concepto de ángulo dado en la sección 4.2 del capítulo anterior.

Un "sistema de coordenadas rectangulares" en un plano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares entre sí (llamadas ejes), una horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección (origen) es el cero de cada escala. Se acostumbra escoger la dirección positiva, en la escala horizontal (eje X), a la derecha del origen y hacia arriba del origen en la escala vertical (eje Y).

Gracias a este sistema, la posición de un punto P en el plano puede darse por med de sus distancias dirigidas con respecto a estos ejes, a las que son llamada "coordenadas" del punto. La coordenada "x" o abscisa de un punto P (fig. 5.2),

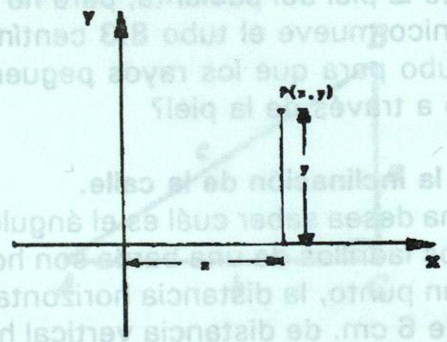


Fig. 5.2

es la distancia dirigida "x" desde el eje Y hasta el punto P, y la coordenada "y" ordenada es la distancia dirigida "y" desde el eje X hasta el punto P. Un punto P co una abscisa "x" y una ordenada "y" se denotará como P(x,y).

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas "cuadrantes" y se enumeran e sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los cuadrante numerados, junto con los signos de las coordenadas de un punto en cada uno de ellos se muestran en la figura 5.3.

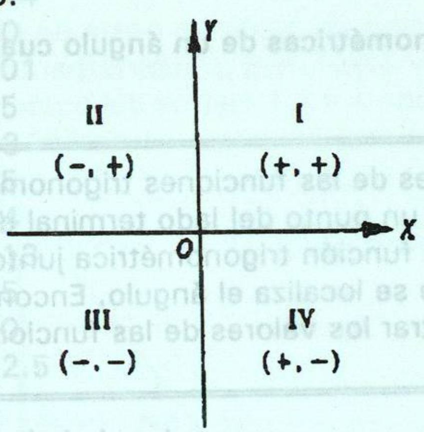


Fig. 5.3

Otra distancia por considerar es la distancia del origen O al punto P. Esta distanc llamada R (figura 5.4), es la "distancia radial" de P. La "distancia radial" de P no e una distancia dirigida, por lo cual siempre es un número no negativo. Utilizando e teorema de Pitágoras se puede determinar R en términos de "x" y de "y":

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

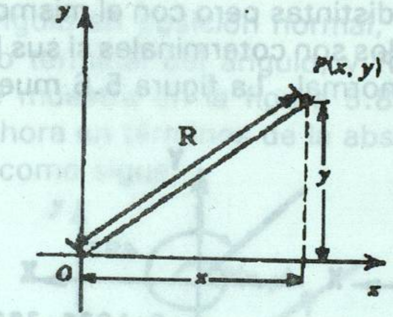


Fig. 5.4

Por lo tanto, a cada punto P localizado en un sistema de coordenadas rectangulares, se le asocian tres valores: "x", "y" y R.

A un punto P se le asocia también un cuarto valor, θ , donde θ es la medida de un ángulo dirigido (positivo, si se mide en contra de las manecillas del reloj y negativo, si se mide a favor)

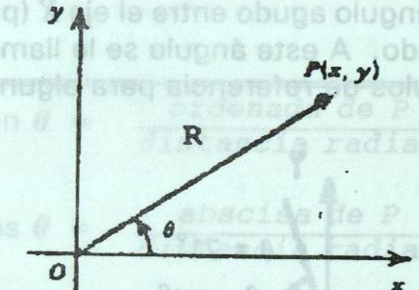


Fig. 5.5

Este ángulo tiene como lado inicial la parte positiva del eje X y como lado terminal el rayo que sale del origen O y que pasa por el punto P (fig. 5.5) observa que no hay un único valor de θ para cada punto P; de hecho, hay un número ilimitado de valores de θ que pueden asociarse a cada punto P, que pueden encontrarse agregando múltiplos enteros de 360° al valor del ángulo específico.

> Con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo se encuentra en "posición normal", cuando su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo X.

Un ángulo en posición normal pertenece al "primer cuadrante" cuando su lado terminal cae dentro del cuadrante I, pertenece al "segundo cuadrante" si su lado terminal cae dentro del cuadrante II, etc. Si el lado terminal de un ángulo coincide con uno de los ejes coordenados, se dice que el ángulo es un "ángulo cuadrantal" (ya que el lado terminal es una frontera entre dos cuadrantes adyacentes). Por ejemplo, los ángulos situados en 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, 450°, 540°, 630°; etc. son cuadrantales.

Observa que R puede rotar, ya sea en la dirección en que giran las manecillas del reloj, o bien en la dirección contraria hacia el punto P. También R puede rotar dando una o más vueltas completas hasta llegar al punto P.

Los ángulos de medidas distintas pero con el mismo lado terminal se llaman "ángulos coterminales". Los ángulos son coterminales si sus lados terminales coinciden al estar los ángulos en posición normal. La figura 5.6 muestra tres ángulos coterminales:

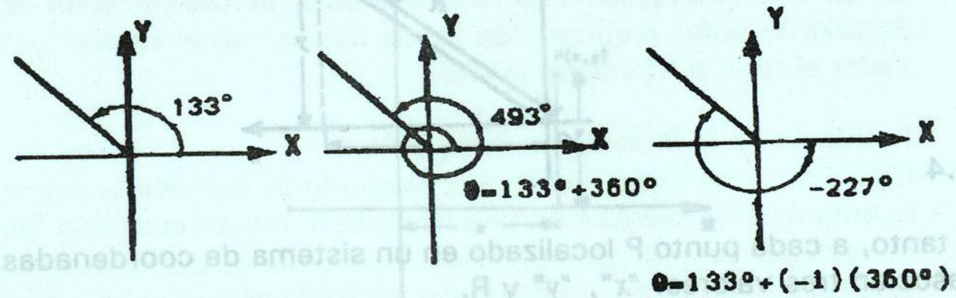


Fig. 5.6

Para dibujar un ángulo en posición normal y localizar R exactamente, nos podemos auxiliar encontrando el ángulo agudo entre el eje X (parte positiva o negativa) y el lado terminal R del ángulo dado. A este ángulo se le llama "ángulo de referencia" (θ_r). La figura 5.7 muestra ángulos de referencia para algunos valores de θ

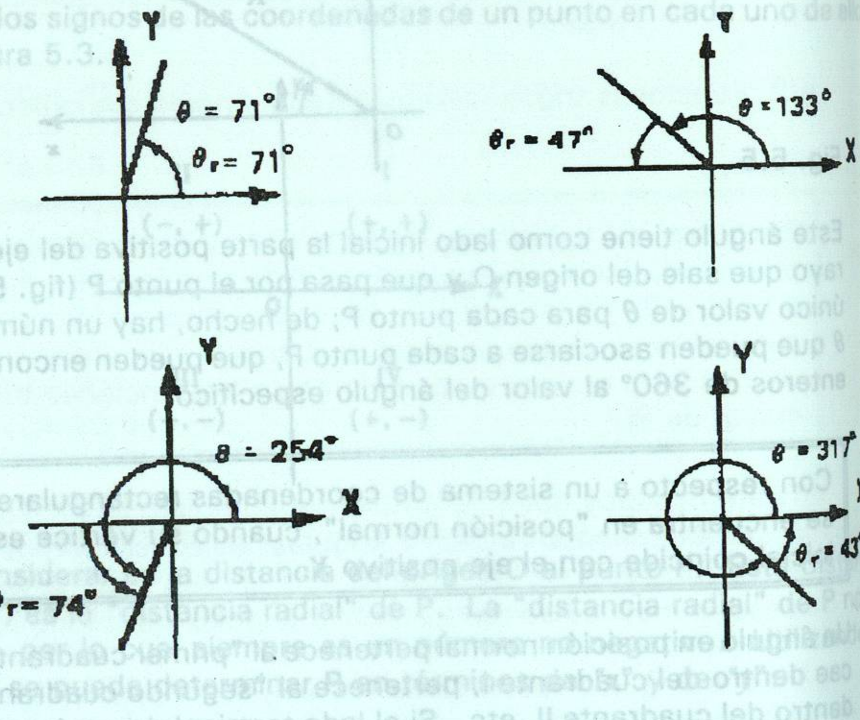


Fig. 5.7

En general, el valor del ángulo de referencia de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentre R. Si θ es un ángulo positivo en posición normal y el lado terminal de θ está en el:

Cuadrante I,	entonces	$\theta_r = \theta$
Cuadrante II,	entonces	$\theta_r = 180° - \theta$
Cuadrante III,	entonces	$\theta_r = \theta - 180°$
Cuadrante IV,	entonces	$\theta_r = 360° - \theta$

Si θ es la medida de un ángulo en posición normal, $P(x,y)$ es un punto distinto del origen localizado en el lado terminal del ángulo, y R es la distancia radial positiva desde O hasta P (como se muestra en la figura 5.8), entonces las seis funciones trigonométricas definidas ahora en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia radial del punto P, quedan como sigue:

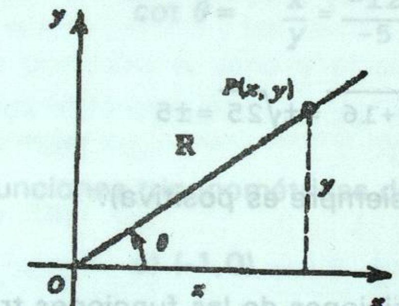


Fig. 5.8

$$\text{sen } \theta = \frac{\textit{ordenada de P}}{\textit{distancia radial}} = \frac{y}{R}$$

$$\cos \theta = \frac{\textit{abscisa de P}}{\textit{distancia radial}} = \frac{x}{R}$$

$$\tan \theta = \frac{\textit{ordenada de P}}{\textit{abscisa de P}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\textit{abscisa de P}}{\textit{ordenada de P}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\textit{distancia radial}}{\textit{abscisa de P}} = \frac{R}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\textit{distancia radial}}{\textit{ordenada de P}} = \frac{R}{y}$$

Puesto que el ángulo θ, en posición normal, generado al rotar R, puede tomar cualquier valor, R puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Así, los valores de "x" y de "y", que representan las distancias dirigidas a un punto en R, varían en signo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentra R; por lo tanto, los signos de las funciones trigonométricas variarán de acuerdo con ésto.

Ejemplo 1
Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal para por (-3,4)