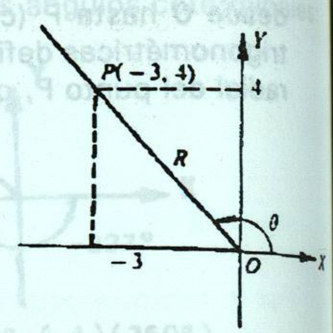
Solución

Primero se determina la distancia, R:
$R^2 = x^2 + y^2$



$R = \sqrt{x^2+y^2}$

$R = \pm\sqrt{(-3)+(4)^2} = \pm\sqrt{9+16} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

entonces, R = 5 (pues R siempre es positiva).

Luego utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas:

sen $\theta = \dfrac{y}{R} = \dfrac{4}{5} = 0.8$ csc $\theta = \dfrac{R}{y} = \dfrac{5}{4} = 1.25$

cos $\theta = \dfrac{x}{R} = \dfrac{-3}{5} = -0.6$ sec $\theta = \dfrac{R}{x} = \dfrac{5}{-3} = -1.6666$

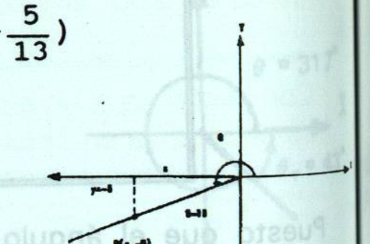
tan $\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{-3} = -1.3333$ cot $\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-3}{4} = -0.75$

Ejemplo 2

Encuentra los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ, si θ está en posición normal en el tercer cuadrante y sen $\theta = -\dfrac{5}{13}$

Solución
Como sabemos que sen $\theta = \dfrac{y}{R}$ y sen $\theta = -\dfrac{5}{13}$, $\left(\dfrac{y}{R} = -\dfrac{5}{13}\right)$

entonces, $y = -5$ y R = 13; luego, utilizando el teorema de Pitágoras, para determinar la abscisa, x:
$R^2 = x^2 + y^2$



$x = \sqrt{R^2 - y^2}$

$x = \pm\sqrt{(13)^2 - (-5)^2} = \pm\sqrt{169-25} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

donde: $x = -12$ (pues la abscisa de un punto en el tercer cuadrante es negativo).

Entonces, los valores de las demás funciones serán:

csc $\theta = \dfrac{R}{y} = \dfrac{13}{-5} = -2.6$

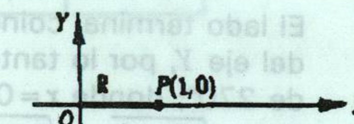
cos $\theta = \dfrac{x}{R} = \dfrac{-12}{13} = -0.9231$ sec $\theta = \dfrac{R}{x} = \dfrac{13}{-12} = -1.0833$

tan $\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-5}{-12} = 0.4167$ cot $\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-12}{-5} = 2.4$

Ejemplo 3
Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal pasa por:
a) (1,0) b) (0,1) c) (-1,0) d) (0,-1)

Solución

a) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 0°; donde: $x = 1$ y $y = 0$



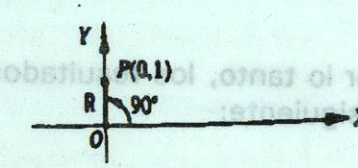
$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
R = 1

Entonces los valores de las funciones de 0° son:
sen 0° = $\dfrac{y}{R} = \dfrac{0}{1} = 0$ csc 0° = $\dfrac{R}{y} = \dfrac{1}{0} = \mathit{indefinido}$

cos 0° = $\dfrac{x}{R} = \dfrac{1}{1} = 1$ sec 0° = $\dfrac{R}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$

tan 0° = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{1} = 0$ cot 0° = $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{0} = \mathit{indefinido}$

b) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje Y, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 90°; donde: $x = 0$ y $y = 1$



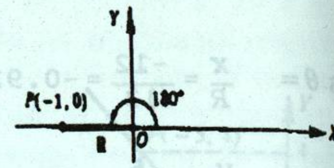
$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(6)^2+(1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
R = 1

Entonces los valores de las funciones de 90° son:
sen 90° = $\dfrac{y}{R} = \dfrac{1}{1} = 1$ csc 90° = $\dfrac{R}{y} = \dfrac{1}{1} = 1$

cos 90° = $\dfrac{x}{R} = \dfrac{0}{1} = 0$ sec 90° = $\dfrac{R}{x} = \dfrac{1}{0} = \mathit{indefinido}$

tan 90° = $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{0} = \mathit{indefinido}$ cot 90° = $\dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{1} = 0$

c) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 180°; donde: $x=-1$ y $y=0$



$$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(-1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

R = 1

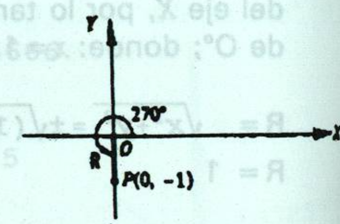
Entonces los valores de las funciones de 180° son:

sen 180° = $\frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$ csc 180° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{0} = indefinido$

cos 180° = $\frac{x}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ sec 180° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

tan 180° = $\frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$ cot 180° = $\frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = indefinido$

d) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje Y, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 270°; donde $x=0$ y $y=-1$



$$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

R = 1

Entonces los valores de las funciones de 270° son:

sen 270° = $\frac{y}{R} = \frac{-1}{1} = -1$ csc 270° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{-1} = -1$

cos 270° = $\frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$ sec 270° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{0} = indefinido$

tan 270° = $\frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = indefinido$ cot 270° = $\frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

Por lo tanto, los resultados obtenidos en el ejemplo 3 se pueden resumir en la tabla 3 siguiente:

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	--	1	--
90	1	0	--	0	--	1
180°	0	-1	0	--	-1	--
270°	-1	0	--	0	--	-1

Tabla 3

Los signos asociados a los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen del cuadrante en el que encuentre el lado final del ángulo. El valor de R siempre es positivo; así los signos de las funciones dependen de los signos de "x" y de "y". Si θ está en el primer cuadrante, tanto "x" como "y" son positivas; por lo tanto, todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas. Si θ está en el segundo cuadrante, el "x" es negativa y la "y" es positiva; así que las razones en las que aparezca "x" son negativas y las demás positivas. Por lo tanto, en el cuadrante II únicamente son positivas el seno y el cosecante, y el coseno, la tangente, la cotangente y la secante son negativas. Después de analizar los signos de las funciones para cada cuadrante, podemos resumir los resultados en la Tabla 4.

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Tabla 4

También se pueden resumir estos resultados, para su mayor retención, como se muestra en figura 5.9 (las funciones que no aparecen son negativas en ese cuadrante).

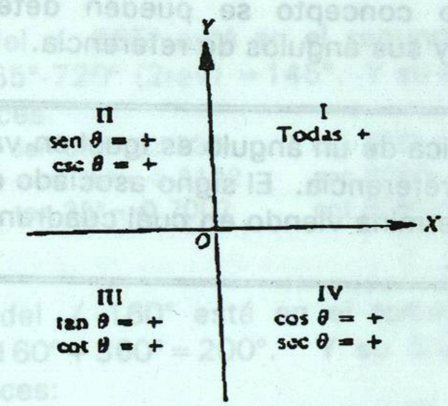


Fig. 5.9

Es evidente que las definiciones de las funciones trigonométricas son válidas independientemente del cuadrante en el que se encuentre R y sus valores para un ángulo dado, también son independientes del punto P en su lado terminal; pero los diagramas de la figura 5.10, demuestran que los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo θ cambian de acuerdo con el valor de θ y están relacionados con el valor de las funciones del ángulo de referencia (θ_r) correspondiente.

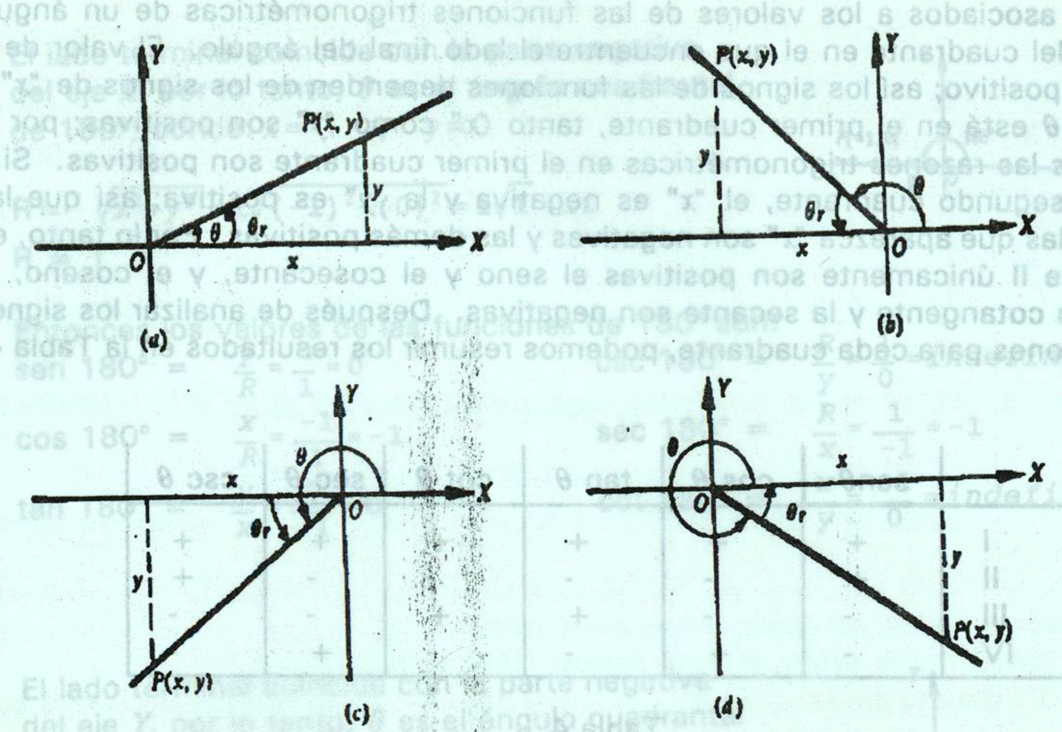


Fig. 5.10

Haciendo uso de este último concepto se pueden determinar las funciones trigonométricas de los ángulos y sus ángulos de referencia.

> Cualquier función trigonométrica de un ángulo es igual en valor absoluto, al mismo valor de su ángulo de referencia. El signo asociado al valor de cada función trigonométrica se determina viendo en cuál cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo dado.

Por ejemplo
$|\text{sen}\ \theta| = \text{sen}\ \theta_r$

o bien,
$\text{sen}\ \theta = \pm\ \text{sen}\ \theta_r$

Este procedimiento se puede aplicar a todas las funciones trigonométricas en todos los cuadrantes, por lo que el concepto anterior se puede aplicar a cualquier ángulo entre 0° y 360°. Por lo demás, si el ángulo es mayor de 360° o menor de 0° (ángulo negativo), dicho ángulo es coterminal con un ángulo que esté entre 0° y 360°. Así, se puede aplicar la regla a cualquier ángulo arbitrario. Conviene recordarte que los valores varían en signo, dependiendo del cuadrante en que se encuentre el lado terminal del ángulo.

Ejemplo 4
Utilizando el concepto de ángulo de referencia y las tablas trigonométricas o una calculadora, encuentra el valor de las funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 110° b) 320° c) 230° d) 865° e) -160°

Solución

a) El lado terminal del $\angle 110°$ está en el segundo cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 180°-110° = 70°$, entonces:

sen 110° = sen 70° = 0.9397 csc 110° = csc70° = 1.0642
cos 110° = -cos 70° = -0.3420 sec 110° = -sec 70° = -2.9238
tan 110° = -tan 70° = -2.7475 cot 110° = -cot 70° = -0.3640

b) El lado terminal del $\angle 320°$ está en el cuarto cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 360°-320° = 40°$, entonces:

sen 320° = -sen 40° = -0.6428 csc 320° = -csc 40° = -1.5557
cos 320° = cos 40° = 0.7660 sec 320° = sec 40° = 1.3054
tan 320° = -tan 40° = -0.8391 cot 320° = - cot 40° = -1.1917

c) El lado terminal del $\angle 230°$ está en el tercer cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 230°-180° = 50°$; entonces:

sen 230° = -sen 50° = -0.7660 csc 230° = -csc 50° = -1.3054
cos 230° = -cos 50° = -0.6428 sec 230° = -sec 50° = -1.5557
tan 230° = tan 50° = 1.1917 cot 230° = cot 50° = 0.8391

d) El lado terminal del $\angle$ 865° está en el segundo cuadrante, pues su ángulo coterminal, $\theta_c = 865°-720°$ (2rev) $= 145°$. Y su ángulo de referencia $\theta_r = 180°-145° = 35°$; entonces:

sen 865° = sen 145° = sen 35° = 0.5736 csc 865° = csc 145° = csc 35° = 1.7434
cos 865° = cos 145° = -cos 35° = -0.8192 sec 865° = sec 145° = -sec 35° = -1.2208
tan 865° = tan 145° = -tan 35° = -0.7002 cot 865° = cot 145° = -cot 35° = -1.4281

e) El lado terminal del $\angle$-160° está en el tercer cuadrante, pues su ángulo coterminal, $\theta_c = -160° + 360° = 200°$. Y su ángulo de referencia, $\theta_r = 200°-180° = 20°$; entonces:

sen (-160°) = sen 200° = -sen 20° = -0.3420 csc (-160) = csc 200° = -csc 20° = -2.9238
cos(-160°) = cos 200° = -cos 20° = -0.9397 sec (-160°) = sec 200° = -sec 20° = -1.0642
tan (-160°) = tan 200° = tan 20° = 0.3640 cot (-160°) = cot 200° = cot 20° = 2.7475

Cuando se da un ángulo, sus funciones trigonométricas están determinadas en forma única. Sin embargo, cuando se da el valor de una función de un ángulo, el ángulo no se determina en forma única. Por ejemplo, si sen $\theta = 0.5$, entonces $\theta = 30°$, 150°, 390°, 510°,... En general, dos posiciones posibles del lado terminal pueden encontrarse entre 0° y 360°, por ejemplo, los lados terminales de 30° y 150° de la ilustración anterior. La excepción a esta regla ocurre cuando el ángulo es cuadrantal.

Ejemplo 5

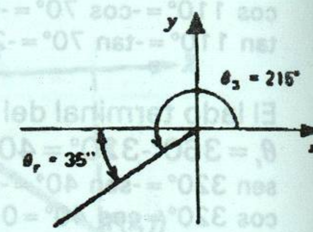
Utilizando el ángulo de referencia, encuentra θ tal que $0° \leq \theta \leq 360°$, si sen $\theta = -0.5736$

Solución

Puesto que el seno es negativo, tanto en el tercero como en el cuarto cuadrante, tienes que encontrar dos ángulos θ_3 y θ_4, cuyo seno sea el valor dado. Para encontrar estos ángulos, tienes que hallar primero el ángulo relacionado con sen $\theta_r = 0.5736$. Usando las tablas o una calculadora se determina que sen $35° = 0.5736$; así el ángulo de referencia es $\theta_r = 35°$.

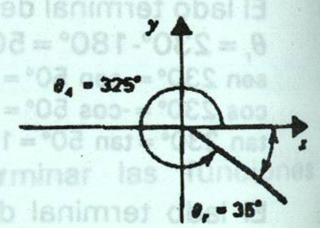
Para la solución del tercer cuadrante:

$\theta_3 = 180° + 35° = 215°$



Para la solución del cuarto cuadrante:

$\theta_4 = 360° - 35° = 325°$



La mayoría de las calculadoras proporcionan los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, simplemente dando entrada al ángulo y oprimiendo el botón de "función" apropiado. Esto es, la calculadora se toma el trabajo de encontrar funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 6

Utiliza la calculadora para encontrar: sen 192°

Solución:

En la calculadora puede evaluarse sen 192° poniendo simplemente la calculadora en el modo grados, dando entrada a 192 y oprimiendo el botón sin. En la pantalla se leerá -0.20791. Por lo tanto,

$$\text{sen } 192° = -0.2079$$

Notarás que cuando se usa una calculadora para encontrar un ángulo, cuando se conoce el valor de su función trigonométrica, se obtiene sólamente un ángulo. Por ejemplo, si sen $\theta = -0.5$, tu calculadora dará solamente el $\angle \theta = -30°$. Sin embargo,

si cos $\theta = -0.5$, tu calculadora dará el $\angle \theta = 120°$. La razón por la que obtenemos un ángulo agudo negativo en el primer caso y un ángulo obtuso positivo en el segundo es porque, por ejemplo, si quisiéramos encontrar el valor de θ para el cual tan $\theta = 1$, desafortunadamente hay una infinidad de valores de θ, que satisfacen esta condición, algunos de los cuales son: 45°, 225°, 405°, 585°, 765°, 945°, etc., también, -135°, -315°, -495°, -675°, etc.; deberás estar conciente de las dificultades inherentes que representa para la calculadora resolver la ecuación tan $\theta = 1$, ¿qué valor desplegaría en la pantalla como solución? Para evitar esta ambigüedad la calcualdora restringe el dominio de tan θ al intervalo entre 0° y 180° o entre, 0° y -180°. Entonces, $\theta = 45°$, que es el único valor de θ para el cual tan $\theta = 1$. La situación descrita para la función tangente es cierta también para las demás funciones trigonométricas y los valores del dominio a los cuales se limita así una función trigonométrica se llaman "valores principales" de la función.

Sobre el dominio de valores principales, ecuaciones tales como sen $\theta = -0.5$, o cos $\theta = -0.5$ tienen sólamente una solución posible.

Para evitar confusiones, te sugerimos que uses la calculadora para encontrar el ángulo de referencia para una función trigonométrica dada. El ángulo de referencia se obtendrá de la calculadora si entra el valor absoluto de la función dada. Por ejemplo, si tan $\theta = -0.3500$, el ángulo de referencia se encuentra presionando 0.3500. Esto es:

$$0.3500 \text{ INV tan} = 19.29°$$

Los ángulos deseados se encuentran ahora mediante el procedimiento descrito previamente; esto es, $\theta_{II} = 180° - 19.29° = 160.29°$ y

$$\theta_{IV} = 360° - 19.29° = 340.71°$$

Ejemplo 7

Encuentra los valores de θ tales que $0° \leq \theta < 360°$ si: sen$\theta = -0.5664$

Solución:

Introduciendo el valor absoluto de la función y presionando las teclas **INV sin**. El ángulo de referencia resultante es:

$$0.5664 \text{ INV sin} = 34.5°$$

Ahora, pueto que el seno es negativo en el tercero y en el cuarto cuadrante, obtenemos:

$$\theta_{III} = 180° + 34.5° = 214.5°$$
$$\theta_{IV} = 360° - 34.5° = 325.5°$$

Ejercicio 5.2

En los problemas 1 y 2 encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ si su lado final pasa por:

1. (15,8) 2) (-7,-24)

En qué cuadrante quedaría localizado θ si:

3. sen θ es negativo y cos θ es positivo
4. sen θ y cos θ son negativos
5. sen θ es positivo y tan θ es negativo
6. sen θ y tan θ son positivos

Encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas de θ, dado:

7. cos $\theta = \dfrac{12}{35}$ y θ está en el IV cuadrante

8. tan $\theta = -\dfrac{21}{20}$ y θ está en el II cuadrante

Evalúa cada una de las siguientes expresiones:

9. sen 0° + 2 cos 0° + 3 sen 90° + 4 cos 90° + 5 sec 0° + 6 csc 90°
10. sen 180° + 2 cos 180° + 3 sen 270° + 4 cos 270° - 5 sec 180° - 6 csc 270°
11. tan 180° - 2 cos 180° + 3 csc 270° + sen 90°
12. sen 0° + 3 cot 90° + 5 sec 180° - 4 cos 270°
13. 4 cos(π/2) - 5 sen(3π/2) - 2 sen(π/2) + sen 0
14. 3 sen π + 4 cos 0 - 3 cos π + sen(π/2)

Expresa cada una de las funciones del ángulo dado, como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

15. cot 147°
16. sec 333°
17. csc 233°
18. cos 100°
19. tan 590°
20. sen 1000°
21. cos (-345°)
22. sen (-965°)

Dado el valor de la función, encuentra la medida del ángulo θ, si $0° \leq \theta < 360°$

23. cos $\theta = 0.6157$
24. tan $\theta = 1.376$
25. sen $\theta = 0.4014$
26. sec $\theta = 1.035$

27. Utiliza los valores de los ángulos especiales cuadrantales y el concepto del ángulo de referencia para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360° sin usar la calculadora o las tablas.

θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°						
30°						
45°						
60°						
90°						
120°						
135°						
150°						
180°						
210°						
225°						
240°						
270°						
300°						
315°						
330°						
360°						

5.3 Relaciones fundamentales e identidades

Objetivo:

Usar las relaciones: recíprocas, de cocientes, pitagóras, de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y de la mitad del ángulo para simplificar espresiones, o bien, para demostrar que una ecuación trigonométrica dada es o no es una identidad.

En las secciones anteriores hemos tenido la ocasión de aprovechar con frecuencia las relaciones que desarrollamos en la sección 4.4 entre las funciones trigonométricas de un ángulo. Esas fórmulas y otras relaciones análogas tienen mucha aplicación en la parte de la trigonometría que constituye el llamado "Análisis trigonométrico", y en algunas otras ramas de las matemáticas superiores, como por ejemplo, en el "Cálculo