Por lo tanto,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

Para deducir las fórmulas de sen$(\alpha-\beta)$ y de cos$(\alpha-\beta)$ procederemos de manera parecida a como lo hicimos en la discusión anterior.

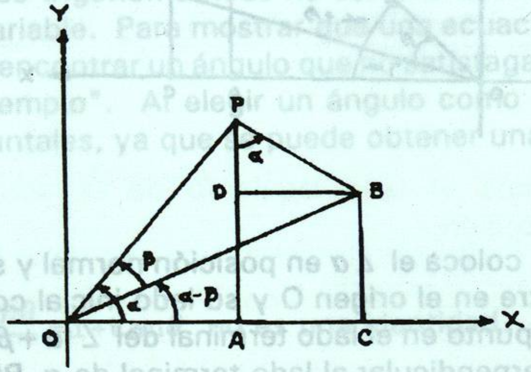

Fig. 5.12

Para construir la figura 5.12, coloca el $\angle\alpha$ en posición normal y sitúa el $\angle\beta$ de tal forma que su vértice se encuentre en el origen y su lado inicial coincida con el lado final del $\angle\alpha$. Si B es cualquier punto en el lado terminal del $\angle(\alpha-\beta)$ y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora, $\angle APB = \alpha$ (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces

$$sen(\alpha-\beta) = \frac{BC}{OB} = \frac{AP-PD}{OB} = \frac{AP}{OB} - \frac{PD}{OB} = \frac{AP}{OP}\cdot\frac{OP}{OB} - \frac{PB}{OB}\cdot\frac{PD}{PB}$$

Por lo tanto,
sen$(\alpha-\beta)$ = sen α cosβ-sen β cosα

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{OC}{OB} = \frac{OA+AC}{OB} = \frac{OA+BD}{OB} = \frac{OA}{OB} + \frac{BD}{OB} = \frac{OA}{OP}\cdot\frac{OP}{OB} + \frac{BD}{PB}\cdot\frac{PB}{OB}$$

Por lo tanto,
cos $(\alpha-\beta)$ = cos α cosβ + senα senβ

Si ahora en la fórmula $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

sustituimos los valores encontrados anteriormente y siguiendo un proceso análogo al anterior, se obtiene que:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

También se pueden establecer identidades acerca de funciones trigonométricas de ángulos dobles, tales como sen 2α, o mitades de ángulos como $\cos\frac{\alpha}{2}$

Supongamos que en las fórmulas de la suma de dos ángulos, los dos ángulos sean iguales, es decir $\alpha = \beta$. Quedarán entonces,

$$sen(\alpha + \alpha) = sen\ \alpha \cos\alpha + sen\ \alpha \cos\alpha$$

Por lo tanto,

$$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - sen\ \alpha\ sen\ \alpha$$

Por lo tanto,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

y

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha}$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Por último, las funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo se expresan en función de las del ángulo por medio de las relaciones anteriores.

De la identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$, si sustituímos $\cos^2\alpha$ por $1 - sen^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$$

y despejamos senα, nos queda

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

si ahora hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\operatorname{sen} {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{2}}$$

en rigor, se debería colocar el signo $\pm$ delante de la raíz cuadrada, lo cual significaría que el sen ${}^{\theta}/_{2}$ es positivo o negativo según el cuadrante, tal como se ilustró en la sección anterior. Si se sobrentiende ésto, no resulta necesario colocar el doble signo delante de las raíces cuadradas en ninguna de las fórmulas siguientes.

De la relación $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$, si sustituímos $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

y despejamos $\cos\alpha$, resulta

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\ 2\ \alpha}{2}}$$

y si hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\cos {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\ \theta}{2}}$$

La $\tan {}^{\theta}/_{2}$ se puede expresar como

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \frac{\operatorname{sen}\ \frac{\theta}{2}}{\cos\ \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\ \theta}{2}}}$$

o sea que

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{1+\cos\ \theta}}$$

o bién, racionalizando el denominador, obtenemos que

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \frac{\operatorname{sen}\ \theta}{1+\cos\ \theta}$$

Las identidades para la suma, diferencía, el doble y la mitad del ángulo con senos, cosenos y tangentes se resumen en la siguiente tabla;

Identidad para la suma de dos ángulos:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\ \alpha + \tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$$

Identidad para la diferencia de dos ángulos:

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\ \alpha - \tan\ \beta}{1+\tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$$

Identidad para el doble del ángulo:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\ \tan\ \alpha}{1-\tan\ ^2\alpha}$$

Identidades para la mitad del ángulo:

$\operatorname{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$

$$\tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$$

Ejemplo 4

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta)$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}\ (\alpha+\beta) + \operatorname{sen}\ (\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\ 2\alpha}$

Solución:

a) Desarrollando cada uno de los binomios al cuadrado

$(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta) =$

$= \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$

$$= \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

cambiando términos semejantes.

$$= (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

b) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Ejemplo 5

Demuestra cada una de las siguientes identidades:

a) $$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}2\theta} + \cos\theta = \sec\theta$$

b) $$\frac{2\tan\theta - \operatorname{sen}2\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} = \tan\theta$$

Solución:

a) Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación y usando las relaciones siguientes: $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, tenemos

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+\cos\theta\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta$$

b) Se utilizan las relaciones

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y desarrollando el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}}{2\operatorname{sen}^2\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \tan\theta$$

Ejercicio 5.3

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta}$

2) $\sec\theta(1-\text{sen}^2\theta)$

3) $\text{sen}\,\theta\sec\theta$

4) $\text{sen}^2\theta(1+\cot^2\theta)$

5) $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cot\theta}+\cos\theta$

6) $\cot^2\theta(1+\tan^2\theta)$

7) $\dfrac{\text{sen}\,\theta+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}+\cot\theta$

8) $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\csc\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta}$

9) $\dfrac{(1+\text{sen}\,\theta)(1-\text{sen}\,\theta)}{\cos\theta}$

10) $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

11) $\csc\theta\sec\theta-\cot\theta$

12) $\dfrac{1}{1+\text{sen}\,\theta}+\dfrac{1}{1-\text{sen}\,\theta}$

13) $\dfrac{1+\sec\theta}{\text{sen}\,\theta+\tan\theta}$

14) $\text{sen}(\theta+\delta)\cos\theta-\cos(\theta+\delta)\,\text{sen}\,\theta$

15) $\cos(\theta-\delta)\,\text{sen}\,\theta-\text{sen}(\theta-\delta)\cos\theta$

16) $\cos(\theta+\delta)\cos\delta+\text{sen}(\theta+\delta)\,\text{sen}\,\delta$

17) $\dfrac{\text{sen}(\theta+\delta)+\text{sen}(\theta-\delta)}{\cos(\theta+\delta)+\cos(\theta-\delta)}$

18) $\text{sen}\,2\theta\sec\theta$

19) $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

20) $\left(\text{sen}\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2-1$

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

21) $\sec\theta+\cos\theta-\text{sen}\,\theta\tan\theta=0$

22) $\cos\theta\tan\theta+\cos\theta\cot\theta=\csc\theta$

31) $(\sec\theta-\cos\theta)\cos\theta=\text{sen}^2\theta$

32) $1-\text{sen}\,\theta\cos\theta\tan\theta=\cos^2\theta$

23) $\dfrac{\tan^2\theta-\text{sen}^2\theta}{\tan^2\theta}=\text{sen}^2\theta$

24) $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\tan\theta=\sec\theta$

25) $\dfrac{\sec\theta-\cos\theta}{\tan\theta}=\text{sen}\,\theta$

26) $\dfrac{\cos^2\theta}{1+\text{sen}\,\theta}+\text{sen}\,\theta=1$

27) $\dfrac{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}{1-\tan\theta}=\cos\theta$

28) $\dfrac{\cot\theta-\text{sen}\,\theta}{\csc\theta-\tan\theta}=\cos\theta$

29) $\dfrac{\csc^2\theta-\cot^2\theta}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta$

30) $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}=2\csc\theta$

33) $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

34) $(\sec\theta+\tan\theta)(1-\text{sen}\,\theta)=\cos\theta$

35) $\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{1-\cos2\theta}=\cot\theta$

36) $\dfrac{\cos2\theta}{\text{sen}\,\theta}+\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\cos\theta}=\csc\theta$

37) $\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos^2\theta}=\tan^2\theta$

38) $\dfrac{\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}\,\theta}-\dfrac{\cos2\theta}{\cos\theta}=\sec\theta$

39) $\cot\theta-\dfrac{\cos2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta}=\tan\theta$

40) $\dfrac{\tan\theta-\tan\delta}{\sec\theta\sec\delta}=\text{sen}(\theta-\delta)$