CAPITULO 6

PROBLEMAS CON TRIANGULOS

En este capítulo usarás las funciones trigonométricas en la solución de triángulos rectángulos, esto es, podrás calcular la medida de los valores o los ángulos de un triángulo rectángulo.

También usarás la Ley de los senos y cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.

Es importante que te des cuenta cómo haz ido desarrollando tus habilidades para poder resolver problemas del mundo real que involucran medidas para la formación de triángulos.

6.1 Triángulos Oblicuángulos - Ley de Cosenos

Ahora aprenderás a resolver triángulos que no son rectángulos; a estos les llamaremos triángulos oblicuángulos.

Objetivos:

1. Dados dos lados y el ángulo incluido, encontrar la longitud del tercer lado.
2. Dados tres lados de un triángulo, encontrar la medida de un ángulo específico.

Supón que la longitud de dos lados b y c del $\triangle$ ABC son conocidos, así como también la medida del ángulo incluido $\angle$ A se conoce (Fig. 6.1a). Entonces se puede encontrar la medida del tercer lado.

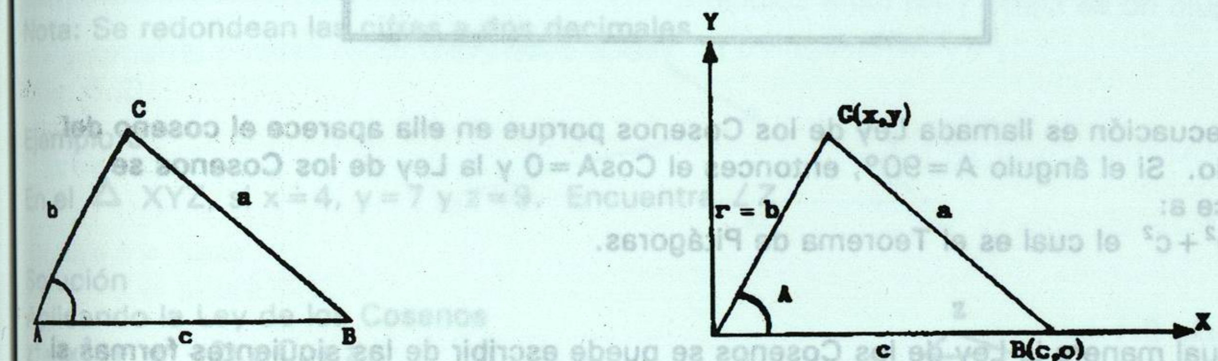


Fig. 6.1a

Si construyes un sistema coordenado *xy* con el ángulo A en posición estándar; entonces a es la distancia entre los puntos B(c,o) y C(x,y). Con la fórmula de la distancia tenemos:

$a^2=(x-c)^2+(y-o)^2$

Para obtener a^2 en términos de b y c y $\angle$A, solo tienes que observar que A es el ángulo y b es el radio del punto C (x,y). Por definición de seno y coseno

$$\frac{x}{b}=Cos\ A \quad y \quad \frac{y}{b}=Sen\ A$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por b obtienes,

$x= b\ Cos\ A \quad y \quad y= b\ Sen\ A$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la distancia de arriba tenemos:

$a^2= (b\ Cos\ A-c)^2 \ + \ (b\ Sen\ A - o)^2$

Elevando al cuadrado los binomios,
$a^2=b^2Cos^2A-2b\ c\ Cos\ A+c^2+b^2\ Sen^2A$

Asociando $Sen^2A + Cos^2A$ y teniendo de factor común la b^2,
$a^2 = b^2\ (Cos^2A + Sen^2A) - 2bc\ Cos\ A + c^2$
como $Cos^2A + Sen^2A = 1$

Entonces $a^2=b^2-2bcCosA+c^2$

El cual usualmente se escribe de la siguiente manera:

LEY DE LOS COSENOS

$$a^2=b^2+c^2-2bcCosA$$

Esta ecuación es llamada Ley de los Cosenos porque en ella aparece el coseno del ángulo. Si el ángulo $A=90°$, entonces el $CosA=0$ y la Ley de los Cosenos se reduce a:
$a^2=b^2+c^2$ el cual es el Teorema de Pitágoras.

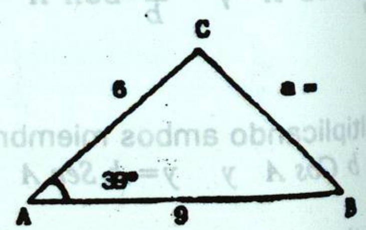
De igual manera la Ley de los Cosenos se puede escribir de las siguientes formas si son dados otros datos:

$b^2 = a^2+c^2-2ac\ Cos\ B$
$c^2 = a^2+b^2-2ab\ Cos\ C$

Ejemplo 1

En $\triangle$ ABC si $b=6$, $c=9$ y $\angle A=39°$. Encontrar lado a.

Solución
Utilizando la fórmula tenemos:
$a^2=b^2+c^2-2bc\ Cos\ A$
$a^2=(6)^2+(9)^2-2(6)(9)\ Cos\ 39°$ sustituyendo
$a^2=36+81-83.93$
$a^2=33.07$
$a=\sqrt{33.07}$
$a=5.75$

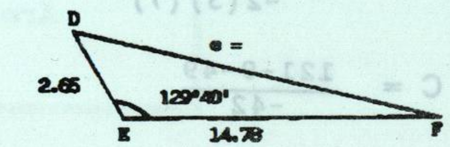


Ejemplo 2

En el $\triangle$ DEF si $\angle E=129°40'$, $d=14.78$ y $f=2.65$. Encontrar lado e.

Nota: Debes reconocer que la Ley de los Cosenos es independiente de las letras que se usan para expresarlo.

Solución
Aplicando la Ley de los Cosenos tenemos:
$e^2= d^2+f^2-2df\ Cos\ E$
$e^2= (14.78)^2+(2.65)^2-2(14.78)(2.65)Cos\ 129°40'$
$e^2= 218.45 + 7.02 - 2(14.78)(2.65)(-0.64)$
$e^2= 218.45 + 7.02 + 50.13$
$e^2= 275.60$
$e^2= \sqrt{275.60}$
$e=16.6$

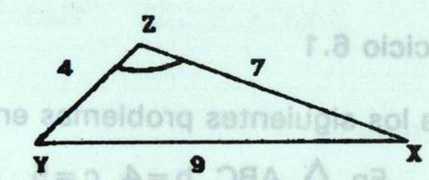


Nota: Se redondean las cifras a dos decimales

Ejemplo 3

En el $\triangle$ XYZ, si $x=4$, $y=7$ y $z=9$. Encuentra $\angle Z$

Solución
Aplicando la Ley de los Cosenos
$z^2=x^2 + y^2 - 2xy\ Cos\ z$



Despejando tenemos:

$$Cos\ z = \frac{z^2-x^2\ \ y^2}{-2xy}$$

$$Cos\ z = \frac{(9)^2-(4)^2-(7)^2}{-2(4)(7)}$$

$$Cos\ z = \frac{81-16-49}{-56}$$

$$Cos\ z = \frac{16}{-56}=-0.2857$$

$\angle z = 106°36'$ Redondeando los minutos.

Ejemplo 4.

En $\triangle$ ABC si a=3, b=7 y c=11. Encuentra $\angle$ C

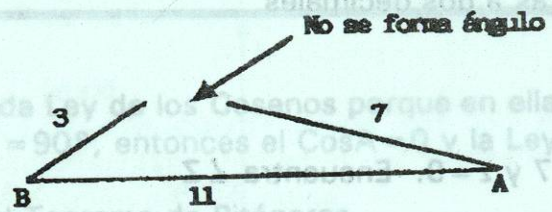
$$\text{Cos C} = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}$$

$$\text{Cos C} = \frac{(11)^2-(3)^2-(7)^2}{-2(3)(7)}$$

$$\text{Cos C} = \frac{121-9-49}{-42}$$

$$\text{Cos C} = \frac{63}{-42} = -1.5$$

Nota. Como el coseno tiene valores de 1 a -1 inclusive, esto quiere decir que el triángulo no se cierra y no tiene solución.



Ejercicio 6.1

Para los siguientes problemas encuentra el lado opuesto al ángulo dado.

1. En $\triangle$ ABC, b=4, c=5, $\angle$A = 50°
2. En $\triangle$ ABC, a=7, c=9, $\angle$B = 35°
3. En $\triangle$ PQR, p=3, q=2, $\angle$R = 136°
4. En $\triangle$ HJK, h=8, j=6.1, $\angle$K = 172°15′
5. En $\triangle$ DEF, d=35.3, f=47.8, $\angle$E = 65°40′
6. En $\triangle$ BAD, a=2.990, d=5.92, $\angle$B = 119°22′

Para los siguientes problemas encuentra el ángulo pedido

7. $\angle$A en $\triangle$ ABC, si a=2, b=3, c=4
8. $\angle$F en $\triangle$ DEF, SI d=5, e=6, f=8
9. $\angle$X en $\triangle$ UVX, si u=6, v=7, x=12

10. $\angle$E en $\triangle$ TEN, si t=12.1, e=20.2, n=16.3
11. $\angle$Y en $\triangle$ XYZ, si x=7.12, y=5.03, z=13.34
12. $\angle$N en $\triangle$ PON, si p=8, o=3, n=12

6.2 Area de un triángulo.

Objetivo:

Dada la medida de dos lados y el ángulo incluido, encuentra el área del triángulo.

De geometría puedes recordar que el área de un triángulo es:
(Fig. 6.2)

$$Area = \frac{1}{2}bh$$

Donde b = base
h = altura.

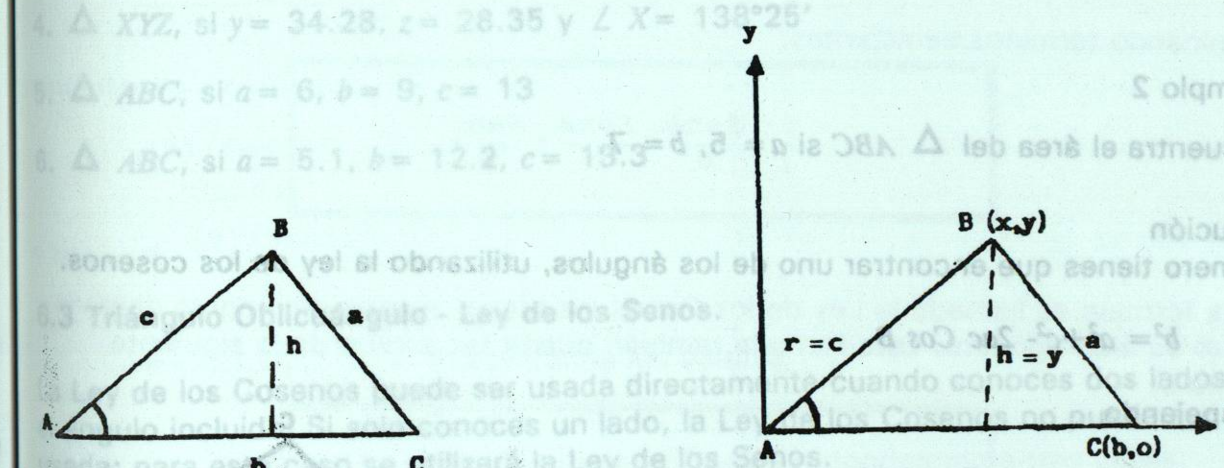


Fig. 6.2

Si conoces los lados b y c y la medida del ángulo A puedes calcular la altura h. Construyendo el punto cartesiano xy. El punto $B(x,y)$ se convierte en un punto en el sistema cartesiano. Por la definición de seno.

$$\frac{y}{r} = Sen A$$

$y = rSenA$ Multiplicando ambos miembros por r

Como $h=y$ y $c=r$ entonces sustituyendo tenemos
$h= c\ Sen\ A$
Sustituyendo h en la ecuación del área, entonces:

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}bcSenA}$$

Ejemplo 1

Encuentra el área del triángulo Δ ABC si $b=13$, $c=15$ y $\angle A= 70°$

Solución:
Aplicando la fórmula.

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)Sen70°$$

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)(0.9397)$$

$\underline{Area\ =\ 91.62}$ Redondeando a dos cifras.

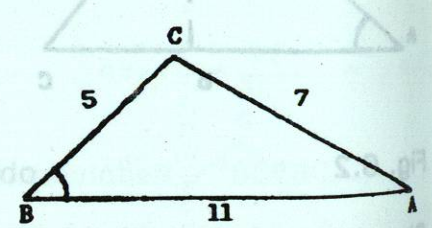
Ejemplo 2

Encuentra el área del Δ ABC si $a=$ 5, $b=$ 7.

Solución
Primero tienes que encontrar uno de los ángulos, utilizando la ley de los cosenos.

$$b^2= a^2+c^2- 2ac\ Cos\ B$$

Despejando



$$2ac\ Cos\ B = a^2+c^2-b^2$$
$$Cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$Cos\ B = \frac{(5)^2+(11)^2-(7)^2}{2(5)(11)}$$

$$Cos\ B = \frac{25+121-49}{110}$$

$$Cos\ B = \frac{97}{110}$$

$$Cos\ B = 0.8818$$

$$\angle\ B = 28°08'$$

Aplicando la ecuación del área.

$$Area = \frac{1}{2}acSenB$$

$$Area = \frac{1}{2}(5)(11)Sen\,28°08'$$

$\underline{Area = 12.96}$ Redondeando a dos cifras.

Ejercicio 6.2
Para los siguientes problemas encuentre el área de cada triángulo.

1. Δ ABC, si $a=$ 6, $b=$ 10 y $\angle\ C=$ 15°
2. Δ ABC, si $b=$ 8, $c=$4 y $\angle\ A=$ 66°
3. Δ DEF, si $d=$ 4.8, $f=$ 3.7 y $\angle\ E=$ 43°12′
4. Δ XYZ, si $y=$ 34.28, $z=$ 28.35 y $\angle\ X=$ 138°25′
5. Δ ABC, si $a=$ 6, $b=$ 9, $c=$ 13
6. Δ ABC, si $a=$ 5.1, $b=$ 12.2, $c=$ 13.3

6.3 **Triángulo Oblicuángulo - Ley de los Senos.**

La Ley de los Cosenos puede ser usada directamente cuando conoces dos lados y el ángulo incluido. Si solo conoces un lado, la Ley de los Cosenos no puede ser usada; para este caso se utilizará la Ley de los Senos.

Objetivo:

Dada la medida de un ángulo, su lado opuesto y la medida de otro ángulo, calcular la longitud de un lado.

En secciones anteriores aprendiste que el área de un triángulo tal como el $\triangle ABC$ (Fig 6.3a) es

Area = $\frac{1}{2}bcSenA$

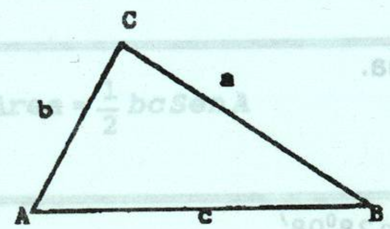


Fig. 6.3a

El área también es igual a $\frac{1}{2}acSenB$ y $\frac{1}{2}abSenC$ como el área es constante, no importa el lado del triángulo que uses para medirla. Igualando estas expresiones obtienes:

$$\frac{1}{2}bcSenA=\frac{1}{2}acSenB=\frac{1}{2}abSenC$$

Multiplicando todos los miembros por 2 y dividiendo por abc nos queda:

$$\frac{2bcSenA}{2abc}=\frac{2acSenB}{2abc}=\frac{2abSenC}{2abc}$$

Eliminando términos semejantes:

$$\boxed{\frac{SenA}{a}=\frac{SenB}{b}=\frac{SenC}{c}}$$

Esta fórmula es llamada la Ley de los Senos y es igual al seno del ángulo dividido entre su lado opuesto. Esta formula también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}}$$

Solo se invierten los numeradores y denominadores.

Los siguientes ejemplos te muestran cómo usar éstas fórmulas.

Ejemplo 1

Dados dos ángulos y un lado encontrar los otros lados.

En el $\triangle$ *ABC*, $\angle B$= 64°, $\angle C$= 38° y lado b=9; encontrar lado c, y lado a. (Fig. 6.3b)

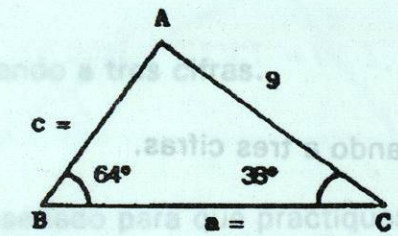


Fig. 6.3b

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{SenA}=\frac{9}{Sen64^{o}}=\frac{c}{Sen38^{o}}$$

Como se puede observar, nos conviene tomar las dos últimas partes de la fórmula, ya que así, tendremos tres datos y sólo una incógnita.

$$\frac{9}{Sen64^{o}}=\frac{c}{Sen38^{o}}$$

Despejando c tenemos:

$$\frac{(9)\,(Sen38^{o})}{Sen64^{o}}=c$$

o sea $c=\frac{(9)\,(Sen38^{o})}{Sen64^{o}}$

$c=\frac{(9)\,(0.6157)}{0.8988}$ Encontrando los valores

$\underline{c=\ 6.165}$ Haciendo operaciones y redondeando a tres cifras.

Para encontrar el lado a, primero tienes que encontrar el $\angle A$, entonces:

$\angle A$= 180°- 38°- 64°= 78°

Usando los dos primeros tramos de la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{Sen78^{o}}=\frac{9}{Sen64^{o}}$$

Despejando a,

$$a = \frac{(9)(Sen78^o)}{Sen64^o}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a = \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a = 9.794}$ Redondeando a tres cifras.

Ejemplo 2
Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el $\triangle$ ABC, $a=8$, $\angle B = 64°$ y $\angle C = 38°$: encuentre lado b (Fig. 6.3c)

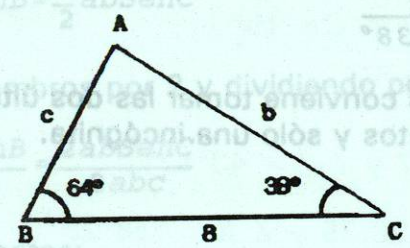


Fig. 6.3c

Solución
Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64^o} = \frac{c}{Sen38^0}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)
$\angle A = 180° - 64° - 38° = 78°$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78^o} = \frac{b}{Sen64^o}$$

Despejando b

$$b = \frac{(8)(Sen64^o)}{Sen78^0}$$

$$b = \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b = 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 6.3

Resuelve los siguientes problemas.

1. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 54°$, $\angle B = 30°$ y lado $a = 9$, encuentra:

   a. Lado b.

   b. Lado c.

2. En $\triangle$ PQR, $\angle$ P = 15°, $\angle$ Q = 130° y lado q = 9, encuentra:

   a. Lado p.

   b. Lado r.

3. En $\triangle$ AHS, $\angle$ A = 29°, $\angle$ H = 107°, lado a = 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En $\triangle$ BIG, $\angle$ B = 2°, $\angle$ I = 79°, lado b = 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.