Despejando a,

$$a = \frac{(9)(Sen78°)}{Sen64°}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a = \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a = 9.794}$ Redondeando a tres cifras.

Ejemplo 2
Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el $\triangle ABC$, $a=8$, $\angle B = 64°$ y $\angle C = 38°$: encuentre lado b (Fig. 6.3c)

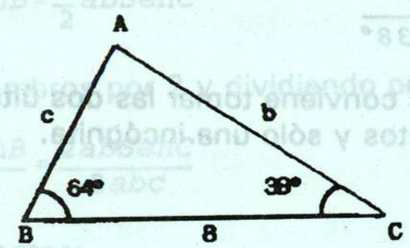


Fig. 6.3c

Solución
Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38^0}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)
$\angle A = 180°-64°-38° = 78°$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78°} = \frac{b}{Sen64°}$$

Despejando b

$$b = \frac{(8)(Sen64°)}{Sen78^0}$$

$$b = \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b = 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 6.3

Resuelve los siguientes problemas.

1. En $\triangle ABC$, $\angle A = 54°$, $\angle B = 30°$ y lado $a = 9$, encuentra:

   a. Lado b.

   b. Lado c.

2. En $\triangle$ PQR, $\angle$ P = 15°, $\angle$ Q = 130° y lado q = 9, encuentra:

   a. Lado p.

   b. Lado r.

3. En $\triangle$ AHS, $\angle$ A = 29°, $\angle$ H = 107°, lado a = 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En $\triangle$ BIG, $\angle$ B = 2°, $\angle$ I = 79°, lado b = 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.

5. En Δ PAF, $\angle$ P = 28°15′, $\angle$ A = 117°30′ y lado f = 8, encuentra:

a. Lado a.

b. Lado p.

6. En Δ JAW, $\angle$ J = 48°12′, $\angle$ W = 73°27′ y lado a = 5, encuentra:

a. Lado j.

b. Lado w.

7. En Δ ALP, $\angle$ A = 85°40′, $\angle$ L = 87°50′ y lado p = 30, encuentra:

a. Lado a.

b. Lado l.

8. **Problema de los tres lados.**
La Ley de los Senos puede ser usada para conocer la medida de un ángulo pero para este caso primero tienes que usar la Ley de los Cosenos. Dados tres lados encontrar los ángulos.

En el Δ ABC si lado a = 7, lado b = 4, lado c = 10 encuentra los ángulos.

a. Usa la Ley de los Cosenos para encontrar el $\angle$ A.

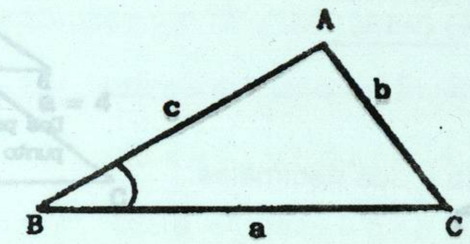
b. Usa la respuesta anterior y con la Ley de los Senos encuentra el $\angle$ C.

c. Encuentra otra vez el $\angle$ C, pero ahora usando la Ley de Cosenos.

d. Probablemente las respuestas de b y c no sean iguales, explica porqué.

6.4 Los casos ambiguos

Ahora resolverás un triángulo cuando tenemos de datos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido (Fig. 6.4a)



Datos: lado a, lado b, $\angle$ B

Fig. 6.4a

Hay 4 formas de que un triángulo ABC puede resolverse si conoces los lados a, b y el ángulo B. Para que veas porqué, es útil construir un triángulo. La figura 6.4b muestra el lado a y el ángulo B construido.

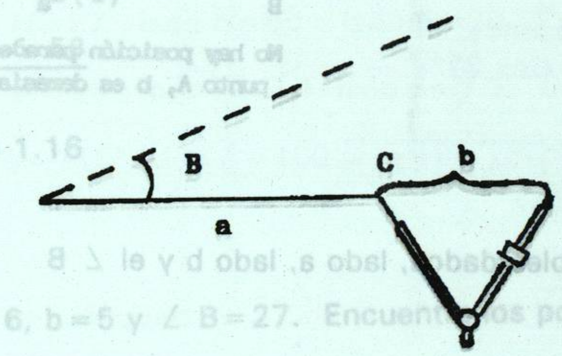


Fig. 6.4b

Como el lado c no esta dado, simplemente dibuja una línea punteada en la dirección correcta, formando en ángulo B con el lado a. Luego para completar el triángulo, pon un compás en el punto c con una abertura igual al del lado b, y después traza su arco, donde el arco del compás toque la línea punteada, ahí será la posición correcta del punto A. La figura 6.4c muestra como hay cuatro formas posibles de trazar el punto A.

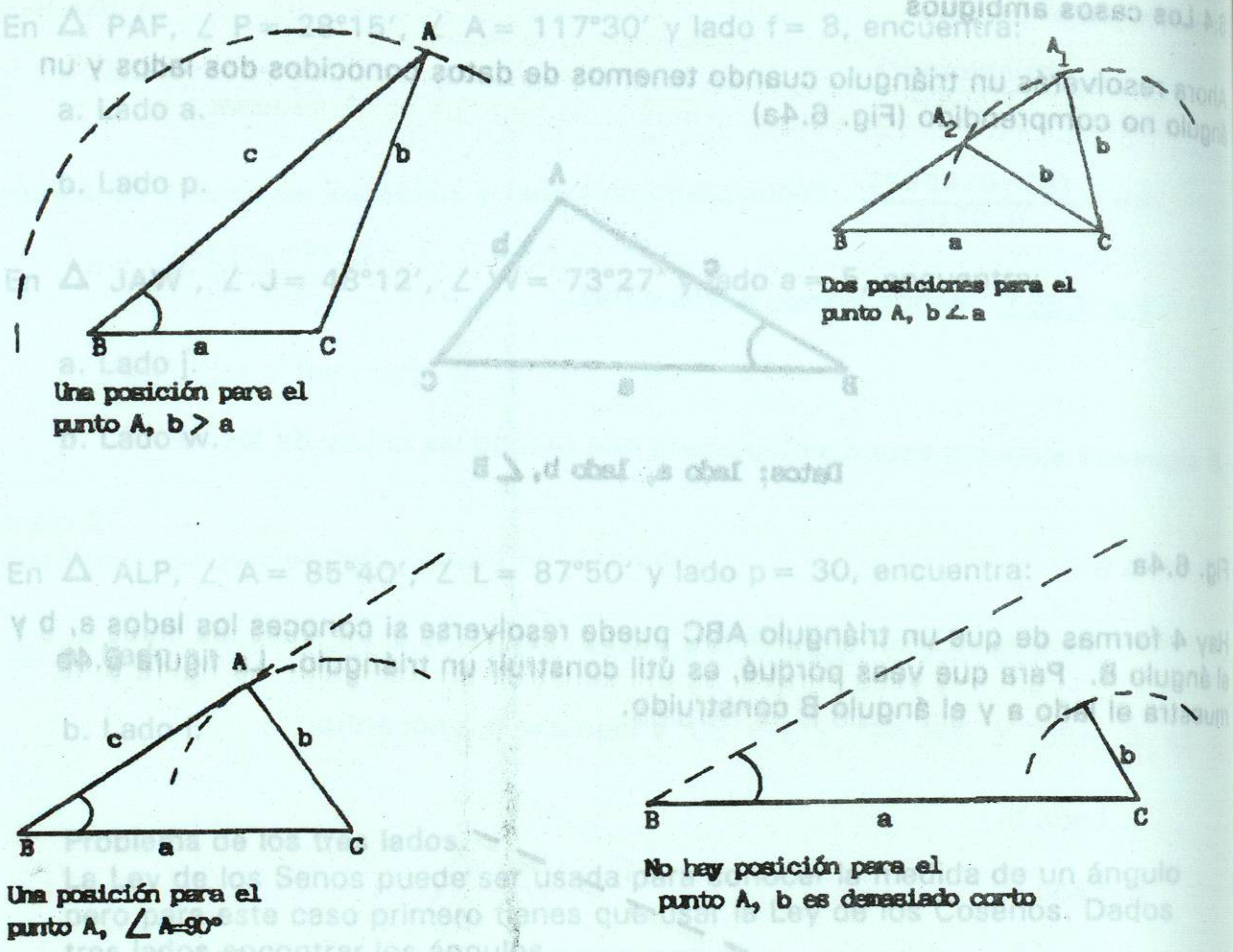


Fig. 6.4c Triángulos posibles dados, lado a, lado b y el ∠ B

Hay uno, dos o ningún posible triángulo cuando son dados dos lados y el ángulo no comprendido, es por esta razón que se llaman casos ambiguos. Ambiguo significa dos o más posibles significados.

Objetivo:

> Dados dos lados y el ángulo no comprendido. Determinar si hay o no triángulo, y si lo hay obtener las medidas del otro lado y el otro ángulo.

Ejemplo 1

En el triángulo △ ABC si a = 4, b = 5 y ∠ A = 27°. Encuentra los posibles valores de lado c.

Solución

Como a < b, hay dos posibles triángulos (Fig. 6.4d). La Ley de los Senos no puede ser usada directamente para encontrar el lado c. ya que ∠ C es desconocido. La Ley de los Cosenos si puede ser usada, solo hay que despejar el lado c.

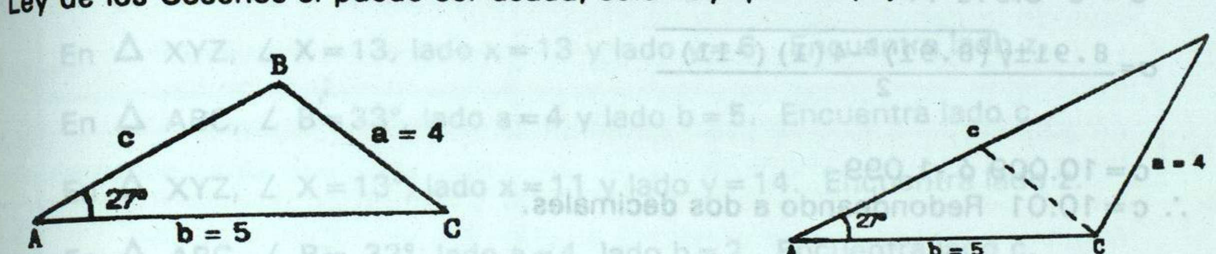


Fig. 6.4d

Escribiendo la Ley de los Cosenos tenemos:

$$4^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\ \text{Cos } 27°$$
$$0 = c^2 - (10\ \text{Cos } 27°)c + 25 - 16$$
$$0 = c^2 - 8.912c + 9$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(5)(9)}}{2(1)}$$

$$c = \frac{8.91 \pm 6.58}{2}$$

$$c \approx 7.75 \text{ ó } 1.16$$

Ejemplo 2

En el △ ABC, a = 6, b = 5 y ∠ B = 27. Encuentra los posibles valores de c.

Solución

como a > b, solo hay un posible triángulo (Fig. 6.4e)

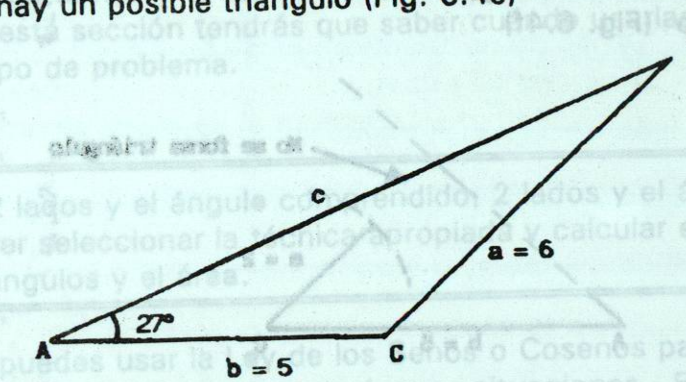


Fig. 6.4e

Por la Ley de los Cosenos

$$6^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\text{ Cos } 27°$$
$$0 = c^2 - 8.91c - 11$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(1)(-11)}}{2}$$

$$c = 10.009 \text{ ó } -1.099$$

$\therefore$ $c = 10.01$ Redondeando a dos decimales.

Nota.- El valor negativo en c, confirma que solo hay un posible triángulo.

Ejemplo 3

En el $\triangle$ ABC, $a = 2$, $b = 5$ y $\angle$ $A = 27°$. Encuentra los valores posibles de c.

Solución

Utilizando la Ley de los Cosenos

$$(2)^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\text{ Cos } 27°$$
$$0 = c^2 - 8.91c + 21$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)}$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{-4.61}}{2}$$

No hay solución por el valor negativo del radicando

$\therefore$ No hay triángulo (Fig. 6.4f)

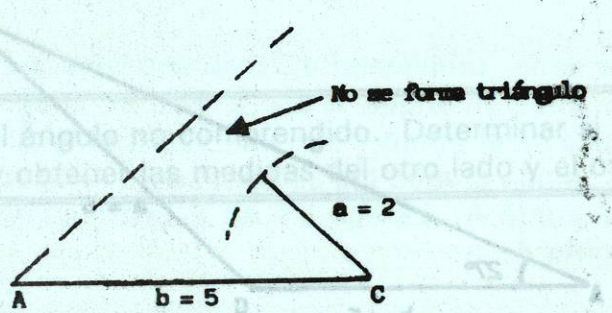


Fig. 6.4f

Ejercicio 6.4

Para los siguientes problemas encuentra la longitud del lado indicado

1. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $B = 32°$, lado $a = 5$ y lado $b = 4$. Encuentra lado c.
2. En $\triangle$ XYZ, $\angle$ $X = 13$, lado $x = 13$ y lado $y = 6$. Encuentra lado z.
3. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $B = 33°$, lado $a = 4$ y lado $b = 5$. Encuentra lado c.
4. En $\triangle$ XYZ, $\angle$ $X = 13°$, lado $x = 11$ y lado $y = 14$. Encuentra lado z.
5. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $B = 32°$, lado $a = 4$, lado $b = 2$. Encuentra lado c.
6. En $\triangle$ XYZ, $\angle$ $X = 13°$, lado $x = 11$, lado $y = 60$. Encuentra lado z.
7. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $A = 130°$, lado $a = 20$, lado $c = 16$. Encuentra lado b.
8. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $A = 170°$, lado $a = 19$ y lado $c = 11$. Encuentra lado b.

En los siguientes problemas determina si hay uno o dos triángulos y luego encuentra los valores del ángulo que se pide.

9. En $\triangle$ ABC, $\angle$ $A = 19°$, lado $a = 26$ y lado $c = 31$. Encuentra $\angle$ C.
10. En $\triangle$ HDJ, $\angle$ $H = 27°$, lado $h = 50$ y lado $d = 20$. Encuentra $\angle$ D.
11. En $\triangle$ XYZ, $\angle$ $X = 58°$, lado $x = 9.4$, lado $z = 7.3$. Encuentra $\angle$ Z.
12. En $\triangle$ BIG, $\angle$ $B = 110°$, lado $b = 100$ y $g = 90$. Encuentra $\angle$ G.

6.5 Solución general de triángulos.

Ya haz aprendido las técnicas necesarias para resolver triángulos oblicuángulos, estas son la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos, pero se te indicaba cuando usar una u otra; en esta sección tendrás que saber cuándo usarlas sólo mencionándote el tipo de problema.

Objetivo

> Dado tres lados, 2 lados y el ángulo comprendido, 2 lados y el ángulo no comprendido, poder seleccionar la técnica apropiada y calcular el otro lado o la medida de los ángulos y el área.

Algunas ocasiones puedes usar la Ley de los Senos o Cosenos para cualquier problema, pero a veces no funcionan para algunas situaciones. En seguida te daremos una guía para que reconozcas situaciones donde determinada técnica si funciona.

Técnicas para la solución de triángulos

1. La Ley de los Cosenos involucra tres lados. Así que, no funciona cuando te dan dos ángulos y un lado.
2. La Ley de los Senos involucra la razón del seno de un ángulo y la longitud de su lado opuesto, así que, no funciona cuando no hay ningún ángulo conocido (tres lados) o cuando solo se conocen dos lados y el ángulo comprendido.
3. La Ley de los Senos no debe ser usada para encontrar medidas de ángulos a menos que ya conozcas si es un ángulo agudo u obtuso.
4. La fórmula del área requiere que conozcas dos lados y el ángulo incluido, así que, si no los tienes debes calcularlos primero.

El siguiente ejercicio requiere que selecciones la técnica apropiada para que resuelvas el problema.

Ejercicio 6.5
En los siguientes problemas encuentra los datos faltantes

1. En $\triangle$ ABC, lado a = 3, lado b = 4, $\angle$ C = 71°20′
2. En $\triangle$ ABC, lado a = 8, lado b = 5, $\angle$ C = 32°40′
3. En $\triangle$ ABC, lado a = 28, lado b = 58, $\angle$ C = 22°50′
4. En $\triangle$ ABC, lado a = 16, lado b = 38, $\angle$ C = 81°30′
5. En $\triangle$ ABC, lado a = 18, lado b = 19, lado c = 17
6. En $\triangle$ ABC, lado a = 3, lado b = 4, lado c = 2
7. En $\triangle$ ABC, lado a = 9, lado b = 10, lado c = 18
8. En $\triangle$ ABC, lado c = 28, $\angle$ A = 121°50′, $\angle$ B = 15°10′
9. En $\triangle$ ABC, lado c = 48, $\angle$ A = 11°20′, $\angle$ B = 27°30′
10. En $\triangle$ ABC, lado c = 17, $\angle$ A = 83°20′, $\angle$ B = 88°30′
11. En $\triangle$ ABC, lado a = 5, lado b = 7, $\angle$ A = 25°40′
12. En $\triangle$ ABC, lado a = 10, lado b = 6, $\angle$ A = 30°10′
13. En $\triangle$ ABC, lado a = 6, lado b = 10, $\angle$ A = 30°10′
14. En $\triangle$ ABC, lado a = 10, lado b = 6, $\angle$ A = 140°50′
15. En $\triangle$ ABC, lado a = 5, lado b = 3, $\angle$ A = 36°50′

6.6 Problemas del mundo real de triángulos oblicuángulos

La siguiente sección se hizo para que practiques tus habilidades en la solución de triángulos oblicuángulos utilizando la Ley de los Cosenos y la Ley de los Senos.

Objetivo

A partir de un enunciado serás capaz de dibujar un triángulo oblicuángulo y calcularás los datos que se te piden.

Ejercicio 6.6

Resuelve los siguientes problemas del mundo real.

1. Dos lados de un paralelogramo son 83 y 140 m., y una de las diagonales mide 189 m. Calcular el área de uno de los triángulos que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.
2. Calcular el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 m. y los ángulos que forma ésta con los lados del paralelogramo son de 35° y 49°.
3. Dos hombres que están en el campo, separados 3000 m. uno del otro, observan un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al helicóptero son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.
4. Los tres lados que limitan un terreno miden 320, 480 y 500 m. respectivamente. Calcula los ángulos que forman dichos lados.
5. Un puente de 24 m. de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de 23° y 32° ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las laderas?
6. Para medir la altura de una montaña, una persona ve hacia la cresta desde un punto A y encuentra su Angulo de elevación de 35°40′, después desde un punto B, alejado 500 m. de A. Encuentra su ángulo de elevación de 21°30′. ¿Cuál es la altura de la montaña?
7. Un buque sale de un puerto hacia el sur y navega 84km. Después vira al suroeste y navega 120 km.
   a. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para regresar al puerto?
   b. ¿Qué rumbo habrá de tomar?
8. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 km. de A y a 22 km. de C, calcula la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de 50°10′.

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre sí. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB = 8 km, AC = 9 km y ∠ BAC = 65°30′ ¿Cuál es el ancho de la bahía?

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

x	*sen x*	*cos x*	*tan x*	*cot x*	*sec x*	*csc x*	
0° 0′	.00000	1.0000	.00000		1.0000		90° 0′
10′	.00291	1.0000	.00291	343.77	1.0000	343.78	50′
20′	.00582	1.0000	.00582	171.88	1.0000	171.89	40′
30′	.00873	1.0000	.00873	114.59	1.0000	114.59	30′
40′	.01164	.9999	.01164	85.940	1.0001	85.946	20′
50′	.01454	.9999	.01455	68.750	1.0001	68.757	10′
1° 0′	.01745	.9998	.01746	57.290	1.0002	57.299	89° 0′
10′	.02036	.9998	.02036	49.104	1.0002	49.114	50′
20′	.02327	.9997	.02328	42.964	1.0003	42.976	40′
30′	.02618	.9997	.02619	38.188	1.0003	38.202	30′
40′	.02908	.9996	.02910	34.368	1.0004	34.382	20′
50′	.03199	.9995	.03201	31.242	1.0005	31.258	10′
2° 0′	.03490	.9995	.03492	28.6363	1.0006	28.654	88° 0′
10′	.03781	.9993	.03783	26.4316	1.0007	26.451	50′
20′	.04071	.9992	.04075	24.5418	1.0008	24.562	40′
30′	.04362	.9990	.04366	22.9038	1.0010	22.926	30′
40′	.04653	.9989	.04658	21.4704	1.0011	21.494	20′
50′	.04943	.9988	.04949	20.2056	1.0012	20.230	10′
3° 0′	.05234	.9986	.05241	19.0811	1.0014	19.107	87° 0′
10′	.05524	.9985	.05533	18.0750	1.0015	18.103	50′
20′	.05814	.9983	.05824	17.1693	1.0017	17.198	40′
30′	.06105	.9981	.06116	16.3499	1.0019	16.380	30′
40′	.06393	.9980	.06408	15.6048	1.0021	15.637	20′
50′	.06685	.9978	.06700	14.9244	1.0022	14.958	10′
4° 0′	.06976	.9976	.06993	14.3007	1.0024	14.336	86° 0′
10′	.07266	.9974	.07285	13.7267	1.0027	13.763	50′
20′	.07556	.9971	.07578	13.1969	1.0029	13.235	40′
30′	.07846	.9969	.07870	12.7062	1.0031	12.746	30′
40′	.08136	.9967	.08163	12.2505	1.0033	12.291	20′
50′	.08426	.9964	.08456	11.8262	1.0036	11.868	10′
5° 0′	.08716	.9962	.08749	11.4301	1.0038	11.474	85° 0′
10′	.09005	.9959	.09042	11.0594	1.0041	11.105	50′
20′	.09295	.9957	.09335	10.7119	1.0044	10.758	40′
30′	.09585	.9954	.09629	10.3854	1.0046	10.433	30′
40′	.09874	.9951	.09923	10.0780	1.0049	10.128	20′
50′	.10164	.9948	.10216	9.7882	1.0052	9.839	10′
	cos x	*sen x*	*cot x*	*tan x*	*csc x*	*sec x*	*x*