INDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES 1

1.1 Función 2
1.2 Funciones lineales 12
1.3 Funciones cuadráticas y parábolas 31
1.4 Más funciones elementales 37
1.5 Combinaciones de funciones 41

CAPITULO 2

LIMITES Y CONTINUIDAD 47

2.1 Concepto intuitivo de límite 48
2.2 Teorema de límites 54
2.3 Límites en los que interviene infinito 58
2.4 Continuidad 65

CAPITULO 3

LA DERIVADA 70

3.1 Incrementos y razones de cambio 71
3.2 La derivada 79
3.3 Derivadas de funciones elevadas a una potencia . . . 87
3.4 Otras aplicaciones 93
3.5 Derivadas del producto y cocientes y La regla de la cadena 100
3.6 Derivadas de orden superior 108

CAPITULO 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA 114

4.1 Derivadas y gráficas de funciones 115
4.2 Bosquejo de curvas polinomiales 125
4.3 Puntos críticos 128
4.4 Criterios para extremos locales 132
4.5 Aplicaciones de máximos y mínimos 137

CAPITULO 5

LA INTEGRAL 145

5.1 Antiderivadas 146
5.2 Areas bajo curvas 153
5.3 Más sobre áreas 160

CAPÍTULO 1
FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Gran parte de las ciencias incluyen el estudio de las relaciones entre dos variables. Por ejemplo, seguramente alguna vez has escuchado comentarios tales como:

- La demanda de un artículo depende de su precio de venta.
- El área de un círculo depende de la longitud de su radio.
- La intensidad del sonido depende de la distancia a que se encuentra la fuente sonora.
- El poder adquisitivo de la moneda depende del índice del costo de la vida.
- El número de viviendas construidas en un año dependen de la tasa de interés del crédito bancario.
- La fuerza entre dos partículas con carga eléctrica opuesta depende de la distancia entre ellas, etc.

En cada una de estas relaciones, el valor de una de las variables determina el valor de la otra. La palabra "función" se utiliza para indicar una dependencia de una cantidad con respecto de otra.

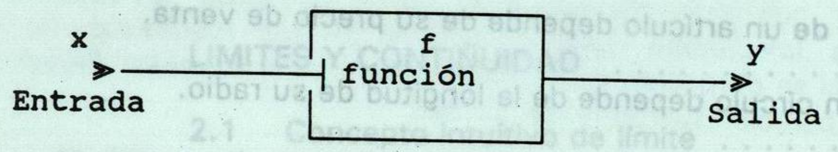
El concepto de función es una de las ideas fundamentales que satura todas las matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos o que requieran el análisis de datos empíricos emplea el concepto de función.

1 1 Función

Empezaremos dando la definición formal de una función:

Definición

> Una "función" es una regla que asocia los elementos de dos conjuntos "X" y "Y" de tal manera que a cada elemento "x" del primer conjunto le corresponde un único elemento "y" del segundo conjunto.



(Observa que la definición no permite que a una entrada le corresponda más de una salida).

Por lo general, se usa una sola letra como "f" (o "g" o "F" o "G") para denominar una función. Así si una función "f" asigna un valor de "y" para un valor de "x" particular, esto se escribe como

$$y=f(x)$$

y se lee "f de x" o "f en x"; y debemos interpretar esta notación como que la "y" es el valor de la función en "x". (Observa que "$f(x)$" no es el producto de "f" por "x").

Ejemplo 1
Si $f(x)=x^2$, encuentra:
a) $f(3)$ b) $f(-2)$ c) $f(a)$ d) $f(a+h)$

Solución
En estos cuatro casos, simplemente reemplazaremos la "x" por 3, -2, "a" y "$a+h$" respectivamente.

a) $f(3)=(3)^2=9$
b) $f(-2)=(-2)^2=4$
c) $f(a)=(a)^2=a^2$

Con el propósito de enfatizar, podríamos haber escrito esta función como

$$f(\ )=(\ )^2$$

Lo anterior muestra que "x" es un "poseedor del lugar" de cualquier valor permisible. Así, si se desea evaluar $f(a+h)$, se introduce "$a+h$" en el paréntesis:
d) $f(a+h)=(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$

Una clara comprensión de la notación funcional es decisiva en cálculo. Estudia el siguiente ejemplo con todo cuidado, pues éste jugará un importante papel en los siguientes capítulos.

Ejemplo 2
Si $g(x)=x^2-2x$, calcula y simplifica
a) $g(-4)$ b) $g(4)$ c) $g(4+h)$ d) $g(4+h)-g(4)$ e) $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}$

Solución
a) $g(-4)=(-4)^2-2(-4)=16+8=24$
b) $g(4)=(4)^2-2(4)=16-8=8$
c) $g(4+h)=(4+h)^2-2(4+h)=16+8h+h^2-8-2h=8+6h+h^2$
d) $g(4+h)-g(4)=8+6h+h^2-8=6h+h^2$

e) $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$

(En general la cantidad $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ para una función dada "g", hará evidente su importancia cuando estudiemos el capítulo 3).

Si una función se define por una relación del tipo "$y=f(x)$", donde $f(x)$ expresa el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable "x", por ejemplo: $y=x^3+3x-7$, entonces a la "x" se le denomina "variable independiente" y a la "y" se le llama "variable dependiente", pues el valor de "y" depende del valor elegido para "x".

La regla de correspondencia es la parte principal de una función, pero ésta no queda determinada completamente, sino hasta que se da su dominio y rango.

> **DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN**
>
> D_f: El "dominio" de una función es el conjunto de valores permisibles que puede tomar la variable independiente.
>
> R_f: El "rango" de una función es el conjunto de valores correspondientes que toma la variable dependiente.

En gran parte de los casos considerados, los dominios y rangos de las funciones con las cuales estaremos interesados son subconjuntos de los números reales. En tales casos, la función por lo regular se representa por su gráfica. La gráfica de una función f se obtiene dibujando todos los puntos (x,y), en donde x pertenece al dominio de f y $y=f(x)$, manejando x y y como coordenadas rectangulares.

Ejemplo 3
Consideremos $f(x)=2+0.5x^2$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, dado que podemos evaluar $f(x)$ para cualquier valor real de x. Algunos de los valores de esta función aparecen en la tabla 1, en la cual algunos valores de x están listados en el renglón superior y los valores de $y=f(x)$ están debajo de los valores

correspondientes de x. Los puntos correspondientes a los valores de x y y se graficaron como puntos en la figura 1. La gráfica de la función $f(x)=2+0.5x^2$ es una curva con forma de U que pasa por los puntos ya graficados.

Tabla 1

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y=f(x)$	2	2.5	4	6.5	10	2.5	4	6.5	10

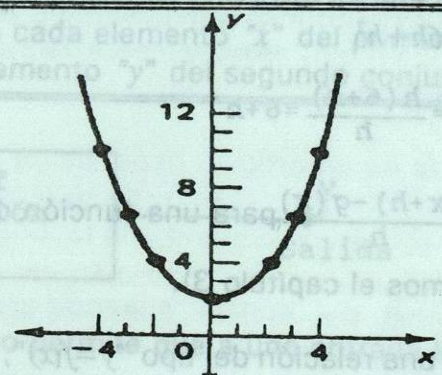


Fig. 1

Supongamos ahora que en el ejemplo 3, x denota el número de artículos producidos por una fábrica y $f(x)$ indica el costo total del producir x unidades. El costo de no producir artículos se obtiene haciendo $x=0$, esto es,

$$f(0)=2$$

De modo que 2 será el costo mínimo, produzcamos artículos o no. Estos se conocen como gastos permanentes. Por ejemplo, inversiones en maquinaria, renta del local de la fábrica y gastos de administración son algunos ejemplos de gastos permanentes. En este caso, el dominio de f no es el conjunto de todos los números reales sino el conjunto de los enteros no negativos, dado que x representa el número de artículos producidos y debe ser un número entero. En consecuencia

$$D_f=\{0,1,2,3,4,...\}$$

Ahora como la variable independiente x toma los valores 0, 1, 2, 3,..., la variable $y=f(x)$ asume los valores

$f(0)=2+0.5(0)^2=2$
$f(1)=2+0.5(1)^2=2.5$
$f(2)=2+0.5(2)^2=4$
$f(3)=2+0.5(3)^2=6.5$
etc.

En este caso, la gráfica de f es la que aparece en la figura 2. Nótese que la gráfica se compone de un conjunto discreto de puntos y no de una curva continua, como lo fue en el caso anterior. De este ejemplo, advertimos que el dominio y rango de una función pueden depender de lo que las variables independientes y dependientes representen en un problema práctico.

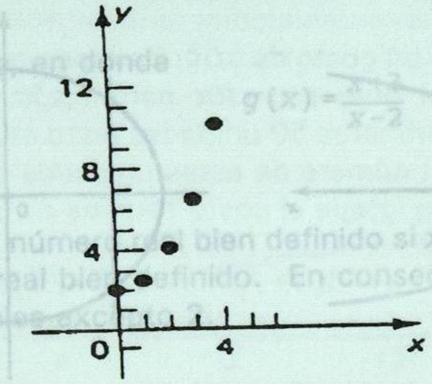


Fig. 2

CRITERIO DE LA LÍNEA VERTICAL

Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano *cartesiano* es la gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) si cualquier línea vertical corta a la gráfica solamente en un punto.

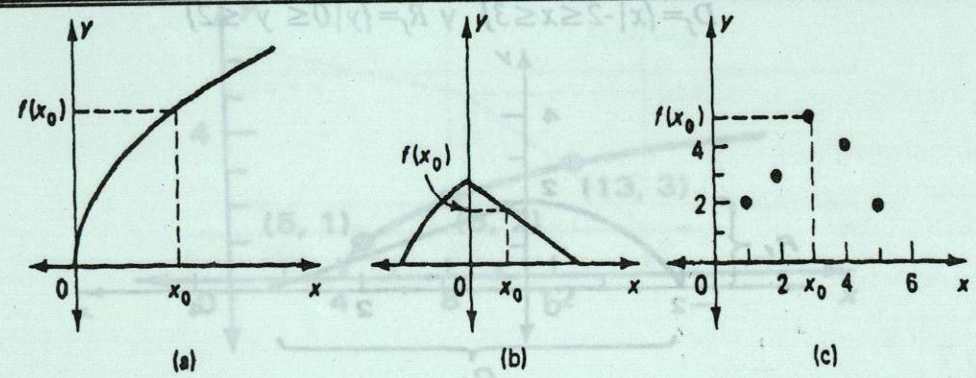


Fig. 3

Cualquier línea vertical corresponde a algún valor particular, digamos $x=x_0$, de la variable independiente, y el punto en que esta línea vertical corta a la gráfica determina el valor de y que le corresponde a x_0. Es decir la gráfica misma de la regla que relaciona cada valor de x con algún valor de y. Si la línea vertical $x=x_0$ no corta a la gráfica en ningún punto, esto significa que x_0 no pertenece al dominio.

Las gráficas de la figura 3 representan funciones. (Nótese que en la parte (c), el dominio de la función es el conjunto de enteros {1,2,3,4,5} de modo que la gráfica sólo consta de cinco puntos más bien que de una curva).

Por otra parte, las gráficas de la figura 4 no representan funciones. Estas no son funciones porque existen líneas verticales que cortan a las gráficas en más de un punto. En consecuencia, al valor $x=x_0$ en la primera gráfica, le corresponden dos valores y_1 y y_2 de y. En tal caso, el valor de x no determina un valor único de y.

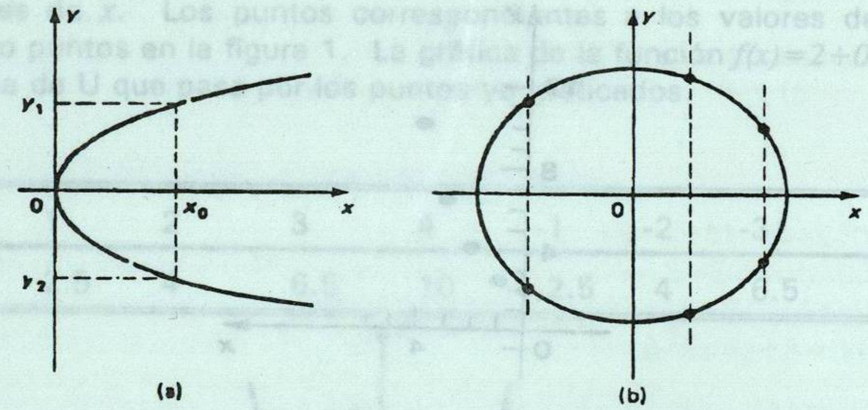


Fig. 4

En la gráfica de una función, los valores a lo largo del eje x en que la gráfica está definida constituyen el dominio de la función. En forma análoga, los valores a lo largo del eje y en que la gráfica tiene puntos constituyen el rango de la función. Esto se ilustra en la figura 5. Aquí tenemos que

$$D_f=\{x|-2\leq x\leq 3\} \text{ y } R_f=\{y|0\leq y\leq 2\}$$

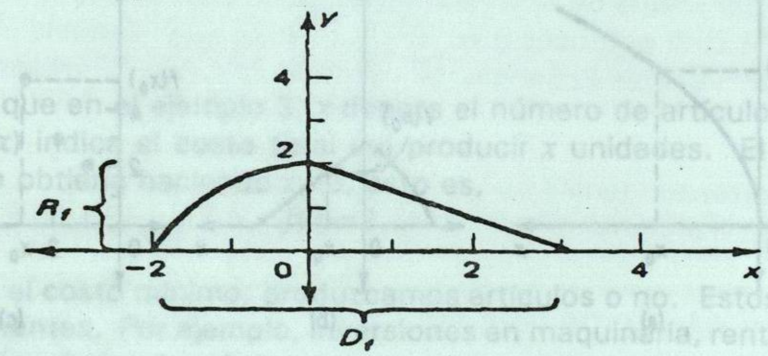


Figura 5

A menudo el dominio de una función no se establece de manera explícita. En tales casos se sobreentiende que es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la regla dada tiene sentido. En el caso de una función f definida por una expresión algebraica, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real bien definido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, dado que la raíz cuadrada sólo tiene sentido si $x\geq 0$. De manera similar, en el caso de la función $g(x)=x^2/(x-3)$, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x=3$, puesto que cuando $x=3$ el denominador se hace cero y $g(3)$ no está definido.

En general, al determinar el dominio de una función debemos tener en mente estas dos condiciones: cualquier expresión dentro de una raíz cuadrada no puede ser negativa y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero. (Más generalmente, cualquier expresión dentro de un radical con índice par tal como $\sqrt{\ }$ ó $\sqrt[4]{\ }$ ó $\sqrt[6]{\ }$ no puede ser negativa).

Ejemplo 4
Determina el dominio de g, en donde $g(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

Solución
Es claro que $g(x)$ no es un número real bien definido si $x=2$. Para cualquier otro valor de x, $g(x)$ es un número real bien definido. En consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los reales excepto 2.

Ejemplo 5
Encuentra el dominio de f si $f(x)=\sqrt{x-4}$

Solución
El dominio de f es el conjunto de todos los valores para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa. Esto es,

$$x-4\geq 0 \quad ó \quad x\geq 4$$

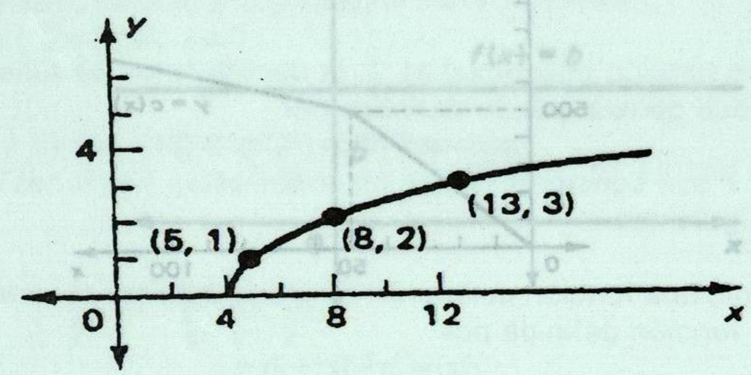


Fig. 6

Si $x<4$, $f(x)$ no es un número real, dado que la cantidad a la que se extrae raíz cuadrada, $x-4$, es negativa. La gráfica de f se aprecia en la figura 6, en la que se han graficado algunos puntos.

En los ejemplos anteriores, hemos estado interesados en funciones que están definidas por una sola expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente. Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

Ejemplo 6
(Función de costo de la electricidad)
La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10¢ por unidad para las primeras 50 unidades y a 3¢ por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determina la función $c(x)$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

Solución

Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x)=10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x=50$, obtenemos $c(50)=500$: el costo de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es x-50, y cuestan 3¢ cada una, por lo que el costo total es de $3(x\text{-}50)$ centavos. Así que, la tarifa total cuando $x > 50$ es

$$c(x)=500+3(x-50)=500+3x-150$$
$$= 350+3x$$

Podemos escribir $c(x)$ en la forma: $C(x) = \begin{cases} 10x & (x \leq 50) \\ 350+3x & (x>50) \end{cases}$

La gráfica de $y=c(x)$ se aprecia en la figura 7. Observa cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x=50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra.

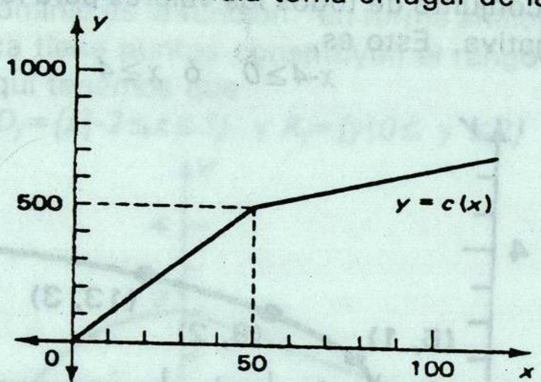


Fig. 7

Ejemplo 7

Considera la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & (0 \leq x \leq 4) \\ \sqrt{x-4} & (x>4) \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica $f(x)=4-x$, mientras que si $x>4$, está definida por la expresión $f(x)= \sqrt{x-4}$.

Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 2 y la gráfica de esta función aparece en la figura 8. Consta de dos segmentos: Si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y=4-x$. Para $x \geq 4$, la función es idéntica a la del ejemplo 5.

x	0	2	4	5	8	13
$y=f(x)$	4	2	0	1	2	3

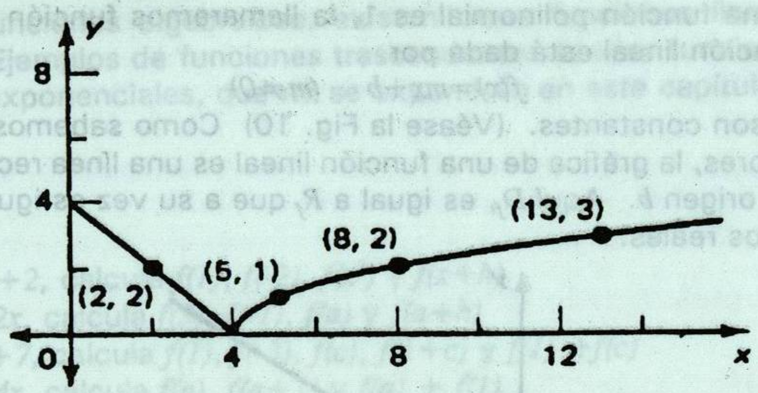


Fig. 8

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes.

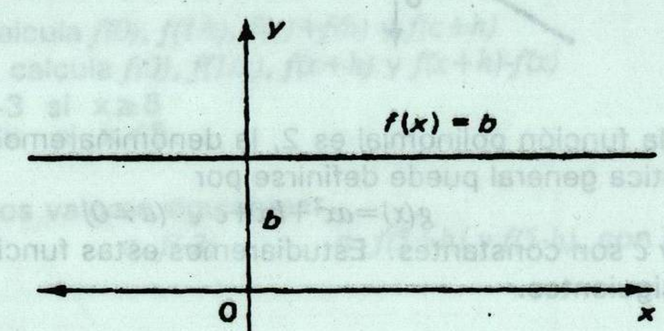


Fig. 9

Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x)=b$$

en donde b es una constante, se denomina función constante. (Véase la fig. 9) La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso

$D_f=$ el conjunto de todos los números reales y $R_f = \{b\}$

Una función definida por la relación

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una función polinomial de grado n. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=3x^7-5x^4+2x-1 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3+7x^2-5x+3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.