Solución

Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x)=10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x=50$, obtenemos $c(50)=500$: el costo de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es x-50, y cuestan 3¢ cada una, por lo que el costo total es de $3(x\text{-}50)$ centavos. Así que, la tarifa total cuando $x > 50$ es

$$c(x)=500+3(x\text{-}50)=500+3x\text{-}150$$
$$= 350+3x$$

Podemos escribir $c(x)$ en la forma: $C(x) = \begin{cases} 10x & (x \leq 50) \\ 350+3x & (x > 50) \end{cases}$

La gráfica de $y=c(x)$ se aprecia en la figura 7. Observa cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x=50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra.

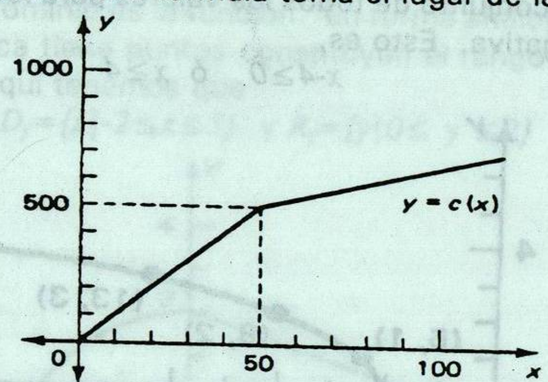


Fig. 7

Ejemplo 7

Considera la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 4\text{-}x & (0 \leq x \leq 4) \\ \sqrt{x-4} & (x > 4) \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica $f(x)=4\text{-}x$, mientras que si $x > 4$, está definida por la expresión $f(x)= \sqrt{x-4}$.

Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 2 y la gráfica de esta función aparece en la figura 8. Consta de dos segmentos: Si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y=4\text{-}x$. Para $x \geq 4$, la función es idéntica a la del ejemplo 5.

x	0	2	4	5	8	13
$y=f(x)$	4	2	0	1	2	3

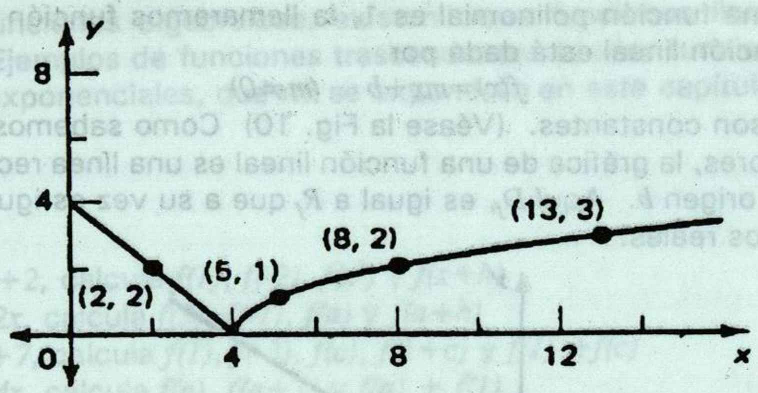


Fig. 8

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes.

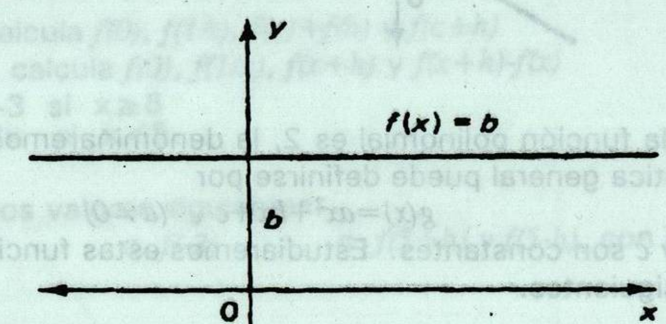


Fig. 9

Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x)=b$$

en donde b es una constante, se denomina función constante. (Véase la fig. 9) La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso

D_f= el conjunto de todos los números reales y $R_f = \{b\}$

Una función definida por la relación

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una función polinomial de grado n. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=3x^7\text{-}5x^4+2x\text{-}1 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3+7x^2\text{-}5x+3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.

Si el grado de una función polinomial es 1, la llamaremos función lineal. La forma general de la función lineal está dada por

$$f(x)=mx+b \qquad (m\neq 0)$$

en donde m y b son constantes. (Véase la Fig. 10) Como sabemos por lo expuesto en cursos anteriores, la gráfica de una función lineal es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Aquí D_f, es igual a R_f que a su vez es igual al conjunto de todos los números reales.

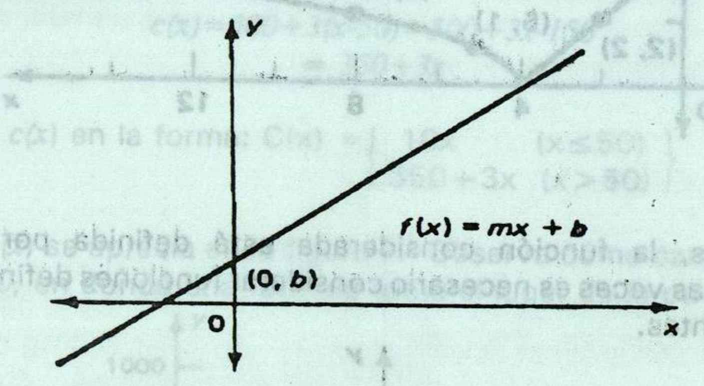


Fig. 10

Si el grado de la función polinomial es 2, la denominaremos función cuadrática. La función cuadrática general puede definirse por

$$g(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

en donde a, b y c son constantes. Estudiaremos estas funciones con todo detalle en las secciones siguientes.

En forma análoga, una función polinomial de grado 3 se conoce como función cúbica. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x)=2x^3-5x^2+7x+1$$

es una función cúbica.

Si el grado de la función polinomial es cero, se reduce a una función constante.

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, se denomina función racional. Ejemplos de funciones racionales son

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-4} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{2x^3-7x+1}{5x^2-2}$$

En general, cualquier función racional tiene la forma $f(x)=p(x)/q(x)$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x.

Si el valor $f(x)$ de una función f se encuentra por un número finito de operaciones algebraicas, f se llama función algebraica. Las operaciones algebraicas son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=\frac{(2x+1)^2-\sqrt{x^3+1}}{(x^2+1)^4} \quad \text{y} \quad g(x)=(2x^2-1)^{-1/7}+5x^{3/4}$$

son funciones algebraicas.

Aparte de las funciones algebraicas, existen otras funciones llamadas funciones trascendentes. Ejemplos de funciones trascendentes son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales, que no se expondrán en este capítulo.

Ejercicio 1.1

1. Dada $f(x)=3x+2$, calcula $f(1)$, $f(-2)$, $f(x^2)$ y $f(x+h)$
2. Dada $f(x)=5-2x$, calcula $f(3)$, $f(-1)$, $f(a)$ y $f(a+h)$
3. Dada $f(t)=5t+7$, calcula $f(1)$, $f(-3)$, $f(c)$, $f(1+c)$ y $f(1)+f(c)$
4. Dada $f(x)=3-4x$, calcula $f(a)$, $f(a+1)$ y $f(a)+f(1)$
5. Dada $f(x)=x^2$, calcula $f(3)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(\sqrt{x})$ y $f(x+h)$
6. Dada $f(x)=3x^2+7$, calcula $f(c)$, $f(c+h)$ y $f(c+h)-f(c)$
7. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, calcula $f(4)$, $f(x^2)$ y $f(a^2+h^2)$
8. Dada $f(x)=\sqrt{x-16}$, calcula $f(25)$, $f(0)$ y $f(7)$
9. Dada $f(t)=3t^2-5t+7$, calcula $f(0)$, $f(1/t)$, $f(c)+f(h)$ y $f(c+h)$
10. Dada $f(u)=2u^2+3u-5$, calcula $f(0)$, $f(1/x)$, $f(x+h)$ y $f(x+h)-f(x)$
11. Dada $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x\geq 5 \\ 6-3x & \text{si } x<5 \end{cases}$

Encuentra cada uno de los valores siguientes:
a. $f(0)$ b. $f(7)$ c. $f(-2)$ d. $f(5+h)$ y $f(5-h)$, con $h>0$

12. Dada $g(x)=\begin{cases} 4x+3 & \text{si } -2\leq x<0 \\ 1+x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ 7 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Evalúa cada uno de los valores siguientes
a. $g(1)$ b. $g(3)$ c. $g(-1)$ d. $g(0)$ e. $g(-3)$

Evalúa $[f(x+h)-f(x)]/h$ en donde $f(x)$ está dada abajo

13. $f(x)=2x+5$
14. $f(x)=3x-7$
15. $f(x)=x^2$
16. $f(x)=x^2-3x+5$

Determina el dominio de cada función

17. $f(x)=2x+3$
18. $f(t)=2t^2-3t+7$
19. $h(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$
20. $d(p)=\dfrac{2p+3}{p-1}$
21. $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$
22. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

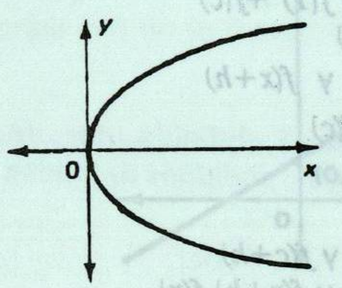
23. $g(t)=\sqrt{t-2}$ 24. $f(y)=-\sqrt{3y-2}$

25. $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}$

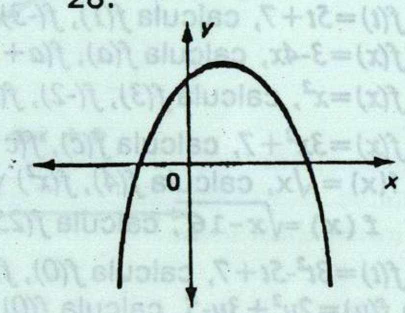
26. $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x>5 \\ 6-3x & \text{si } x<5 \end{cases}$

Establezca si las gráficas representan o no funciones

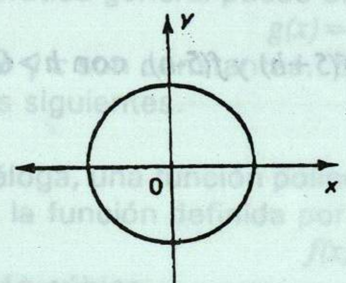
27



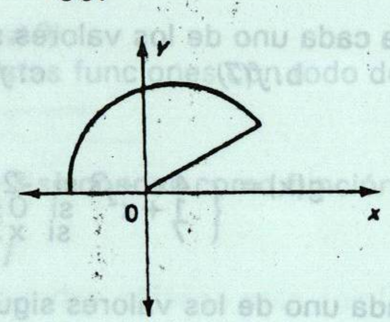
28.



29.



30.



1.2 Funciones Lineales

En esta sección, examinaremos algunas propiedades de las rectas. Nuestro primer objetivo será investigar la ecuación algebraica que tiene una recta dada, así como su gráfica.

Una de las propiedades más importantes de una línea recta es qué tan pronunciadamente sube o baja, y deseamos introducir una cantidad que mida el grado de inclinación (pendiente) de una recta. Empecemos considerando un ejemplo. La ecuación $y=2x-4$ tiene como gráfica la línea recta que aparece en la figura 11. Elijamos dos puntos sobre esta línea, tales como los puntos (3,2) y (5,6), que se denotan, respectivamente, por P y Q en la figura citada. La diferencia entre las coordenadas x de estos dos puntos, denotada por PR, se denomina el "avance" o distancia de P a Q:

$$\text{avance}=PR=5-3=2$$

La diferencia entre las coordenadas y de P y Q, igual a la distancia QR, se denomina la elevación de P a Q:

$$\text{elevación}=QR=6-2=4$$

Observemos que la elevación es igual a dos veces el avance. Este es el caso, no importando qué pares de puntos elijamos sobre la gráfica. Por ejemplo, tomemos los puntos $P'(-1,-6)$ y $Q'(4,4)$. (Véase la fig. 11) Entonces

$$\text{avance}=P'R'=4-(-1)=5 \text{ y elevación}=Q'R'=4-(-6)=10$$

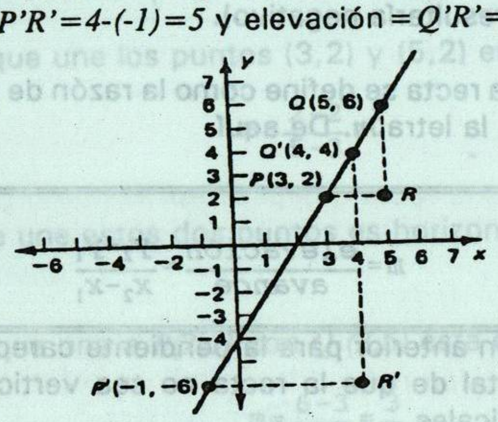


Fig. 11

De nuevo, la razón de la elevación al avance es igual a 2.

La misma razón de la elevación al avance se obtiene en los dos casos porque los triángulos PQR y $P'Q'R'$ son semejantes. Por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales: $QR/PR= Q'R'/P'R'$. Esta razón se denomina la pendiente de la línea recta. La recta de la figura 11 tiene una pendiente igual a 2.

La pendiente de una línea recta arbitraria se define de manera similar. Sean P y Q dos puntos cualesquiera sobre la línea. (Véase la fig. 12) Sean sus coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2), respectivamente. Sea R la intersección de la línea horizontal que pasa por P y la línea vertical a través de Q. Entonces, la distancia PR se denomina el avance entre P y Q y la distancia QR se conoce como la elevación entre P y Q.

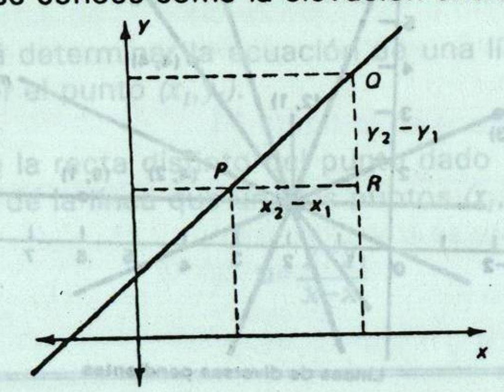


Fig. 12

En términos de coordenadas,

elevación = $QR=y_2-y_1$ y también

avance = $PR=x_2-x_1$

(Nótese que si Q estuviese por debajo de R, lo cual sucedería si la recta presentara una inclinación descendente hacia la derecha, entonces la elevación sería negativa. Podíamos elegir también Q, de tal manera que estuviese a la izquierda de P, en cuyo caso $x_2<x_1$ y el avance resultaría negativo).

La pendiente de una línea recta se define como la razón de la elevación al avance. Por lo regular se denota con la letra m. De aquí

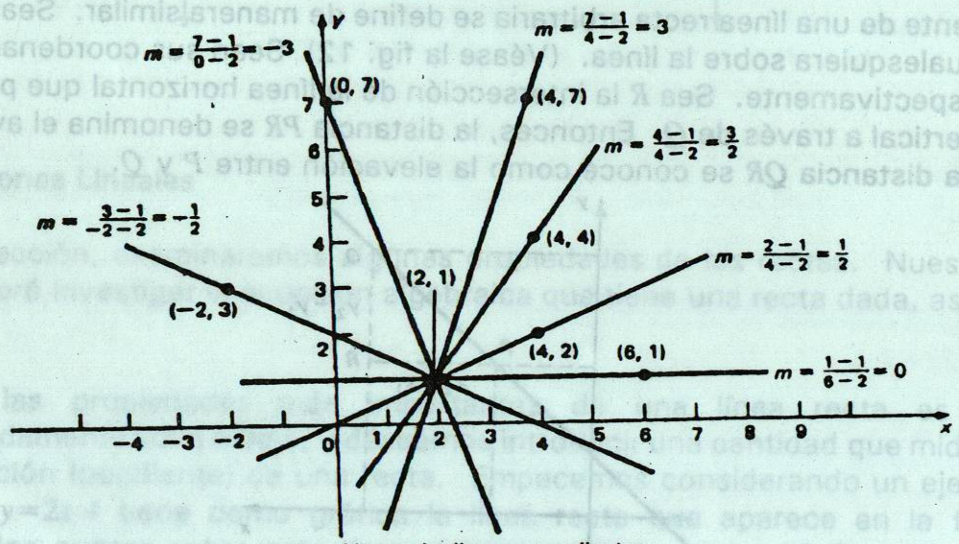
$$\boxed{m=\frac{elevación}{avance}=\frac{Y_2-Y_1}{x_2-x_1}}$$

Nótese que la ecuación anterior para la pendiente carece de sentido a menos que $x_2-x_1\neq 0$; es decir, con tal de que la recta no sea vertical. La pendiente no está definida para rectas verticales.

Debe observarse que la pendiente de una recta es la misma, no importando las posiciones de los puntos P y Q sobre la línea.

Si la pendiente m de una línea es positiva, la línea asciende hacia la derecha.

Entre más grande sea el valor de m, la inclinación de la línea es mayor con respecto a la horizontal. Si m es negativa, la línea desciende hacia la derecha. Si $m=0$, la línea es horizontal. Estas propiedades se ilustran en la figura 13.



Líneas de diversas pendientes

Fig. 13

Ejemplo 1

Encuentra la pendiente de la línea que une los puntos (1,-3) y (3,7)

Solución

Usando la fórmula, la pendiente es:

$$m=\frac{7-(-3)}{3-1}=\frac{10}{2}=5$$

Ejemplo 2

La pendiente de la recta que une los puntos (3,2) y (5,2) es

$$m=\frac{2-2}{5-3}=0$$

De modo que la recta que une estos dos puntos es horizontal

Ejemplo 3

La pendiente de la recta que une a $P(2,3)$ con Q $(2,6)$ está dada por

$$m=\frac{6-3}{2-2}=\frac{3}{0}$$

que no está definida. En consecuencia, la pendiente de la recta que une a P con Q no esta definida. En este caso, la recta PQ es vertical.

¿Qué información necesitamos para dibujar una línea recta particular? Una forma como puede especificarse una línea recta es dando dos puntos situados sobre ella. Una vez que los dos puntos se han dado, la línea completa está determinada, dado que sólo una línea recta puede pasar por esos dos puntos.

A través de cualquier punto, hay por supuesto muchas rectas diferentes con pendientes que van de grandes a pequeñas, positivas a negativas. Sin embargo, si se conoce la pendiente, existe sólo una recta que pasa por el punto en cuestión. en consecuencia, una segunda forma como puede especificarse una línea recta es dando un punto sobre ella y su pendiente.

Ahora nuestra tarea será determinar la ecuación de una línea recta no vertical con pendiente m que pase por el punto (x_1,y_1).

Sea (x,y) un punto sobre la recta distinto del punto dado (x_1,y_1). (Véase la fig. 14) Entonces la pendiente m de la línea que une los puntos (x_1,y_1) y (x,y) está dada por

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Por tanto, se sigue que

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

Esta se conoce como la forma punto-pendiente de la recta.

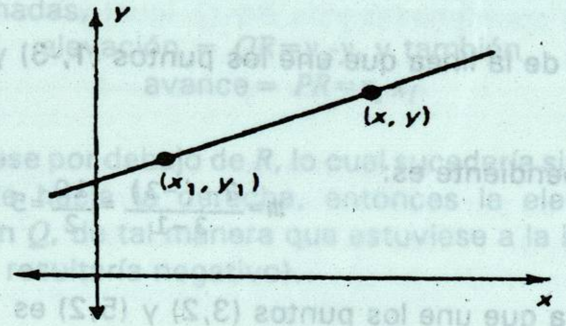


Fig. 14

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-3) con pendiente -2

Solución

Usando la ecuación de la forma punto-pendiente con $m=-2$ y $(x_1,y_1) = (5,-3)$, encontramos que la ecuación requerida de la línea recta es la siguiente

$$y-(-3)=-2(x-5)$$
$$y+3=-2x+10$$
$$y=-2x+7$$

Ejemplo 5
Determina la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos (1,-2) y (5,6)

Solución
La pendiente de la recta que une a (1,-2) con (5,6) es

$$m=\frac{6-(-2)}{5-1}=\frac{8}{4}=2$$

Usando la forma punto-pendiente, la ecuación de la línea recta a través de (1,-2) con pendiente $m=2$ es

$$y-(-2)=2(x-1)$$
$$y=2x-4$$

Esta es la recta que aparece en la figura 11

En la forma punto-pendiente, sea (x_1,y_1) igual a (0,b). (Véase la fig. 15) Entonces la ecuación punto-pendiente se transforma en

$$y-b=m(x-0)$$

o bien

$$\boxed{y=mx+b}$$

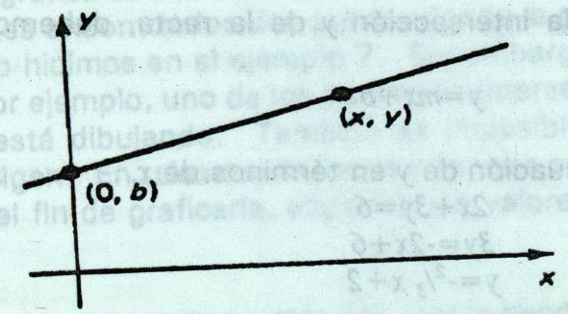


Fig. 15

La cantidad b, que da la distancia a lo largo del eje y, al corte con la línea recta, se conoce como la intersección y de la recta. La ecuación anterior se llama forma pendiente-intersección de la recta.

Una ecuación en forma general (de una función de primer grado) con dos variables x y y es una ecuación de la forma

$$Ax+By+C=0$$

en donde A, B y C son constantes y A y B diferentes de cero.

Con base en el estudio anterior, podemos describir la gráfica de la ecuación lineal general.

Si $B\neq 0$ y $A\neq 0$, la ecuación toma la forma

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

cuando se despeja y. Usando la forma pendiente-intersección, advertimos que ésta es la ecuación de una línea recta cuya pendiente es $-A/B$ y con intersección y igual a -C/B.

De modo que la gráfica de la función lineal general es, en cada caso, una línea recta. Una ecuación lineal de la forma de la ecuación anterior a menudo se conoce como ecuación general de una línea recta. La tabla 3 resume las diversas formas asumidas por la ecuación de una línea recta.

Tabla 3

Forma	Ecuación
1. Punto-pendiente	$y-y_1=m(x-x_1)$
2. Pendiente-intersección	$y=mx+b$
3. General	$Ax+By+C=0$, A y B diferentes de cero.

Ejemplo 6

Dada la ecuación lineal $2x+3y=6$, determina la pendiente y la intersección y de su gráfica.