Solución
Para encontrar la pendiente y la intersección y de la recta, debemos expresar la ecuación dada en la forma

$$y=mx+b$$

Es decir, debemos resolver la ecuación de y en términos de x.

$$2x+3y=6$$
$$3y=-2x+6$$
$$y=-{}^{2}/_{3}\,x+2$$

Comparando la forma pendiente-intersección, $y=mx+b$, tenemos que $m=-{}^{2}/_{3}$ y $b=2$. De modo que la pen18iente es igual a $-{}^{2}/_{3}$ y la intersección y es igual a 2.

Graficando funciones lineales

Ejemplo 7

Dibuja la gráfica de la ecuación lineal $3x-4y=12$

Solución

Sabemos que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables siempre es una línea recta,y que una línea recta está completamente determinada por dos puntos. De modo que al graficar la ecuación lineal, encontramos dos puntos distintos (x,y) que satisfagan la ecuación, los graficamos y los unimos mediante una línea recta. Haciendo $x=0$ en la ecuación, obtenemos

$$-4y=12 \quad \text{o bien} \quad y=-3$$

En consecuencia, un punto sobre la línea es (0,-3). Haciendo $y=0$ en la ecuación considerada, vemos que

$$3x=12 \quad \text{o bien} \quad x=4$$

Por tanto, (4,0) es un segundo punto sobre la línea. Graficando los puntos (0,-3) y (4,0), los cuales están situados sobre los ejes coordenados y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica de la ecuación, que aparece en la figura 16.

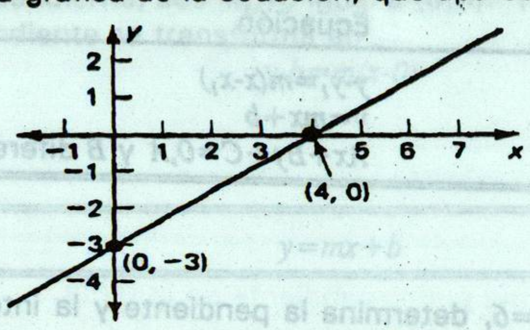

Fig. 16

Cuando dibujamos la gráfica de una relación lineal, el procedimiento más simple en la mayoría de los casos es encontrar los dos puntos donde la gráfica corta a los ejes de coordenadas, como lo hicimos en el ejemplo 7. Sin embargo, hay ocasiones en que no es conveniente; por ejemplo, uno de los puntos de intersección puede estar afuera del papel donde se está dibujando. También es imposible usar esta técnica si la gráfica pasa por el origen. En tales casos, podemos usar cualquier pareja de puntos sobre la gráfica con el fin de graficarla, eligiendo los valores de x más convenientes para calcular y.

En forma alternativa, algunas veces es más útil usar la pendiente al dibujar la gráfica. Por ejemplo, la ecuación del ejemplo 7 puede escribirse en la forma $y={}^{3}/_{4}\,x-3$, lo cual indica que la pendiente es ${}^{3}/_{4}$ y la intersección y es -3. Así que, podemos graficar el punto (0,-3). Además, por cada 4 unidades que nos movamos a lo largo de la dirección positiva de las x, la gráfica sube 3 unidades, dado que pendiente = elevación/avance $={}^{3}/_{4}$. De modo que si nos movemos 4 unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente a partir del punto (0,-3) obtenemos un segundo punto sobre la gráfica. O bien podemos movernos horizontalmente 8 unidades y 6 unidades verticalmente para obtener un segundo punto. Esto se ilustra en la figura 17. De la intersección y que es -3, nos movemos horizontalmente 8 unidades y luego subimos 6 unidades hasta llegar al punto B. Entonces, puede dibujarse una línea recta que una al punto (0,-3) con B.

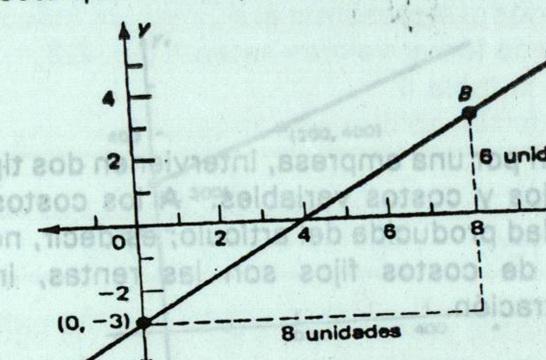

Fig. 17

Ejemplo 8
(Decisiones sobre vías de comunicación)
El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de $200 millones para gastos de transporte, e intenta utilizarlos para construir otras líneas de tren subterráneo o supercarreteras. Si cuesta $2.5 millones construir 1 km de supercarreteras y $4 millones construir 1 km de líneas de tren subterráneo. Encuentra la relación entre el número de kilómetros de autopista y de líneas de tren subterráneo que pueden construirse usando la totalidad del presupuesto. Interpreta la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Solución
Suponga que van a construir x kilómetros de autopista y y kilómetros de líneas de tren subterráneo. El costo para construir los x kilómetros de autopista a $2.5 millones por

kilómetro es de 2.5x millones de dólares y el costo de construcción de y kilómetros de tren subterráneo a $4 millones por kilómetro es de $4y$ millones de dólares. Dado que el costo total es igual al presupuesto asignado para tal propósito,

$$2.5x+4y=200$$

Esta ecuación nos da la relación requerida entre los números de kilómetros que pueden construirse con el presupuesto.

Despejando y en la ecuación dada, obtenemos

$$y=-\tfrac{5}{8}x+50$$

La pendiente de esta línea es $-\tfrac{5}{8}$, que expresa el hecho de que cada kilómetro adicional de construcción de autopista será el costo de construcción de $\tfrac{5}{8}$ kilómetros de tren subterráneo. Despejando a x en la ecuación original en función de y

$$x=-\tfrac{8}{5}y+80$$

Así que, cada kilómetro adicional de construcción de tren subterráneo es a cambio de $\tfrac{8}{5}$ kilómetro de construcción de autopistas.

Por último estudiaremos algunas aplicaciones de las funciones lineales y líneas rectas a problemas en la administración y la economía.

Modelos de costo lineal

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como costos fijos y costos variables. A los costos fijos hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; es decir, no dependen del nivel de producción. Ejemplos de costos fijos son las rentas, intereses sobre préstamos y salarios de administración.

Los costos variables dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos. Los costos de los materiales y de la mano de obra son ejemplos de costos variables. El costo total está dado por

$$\boxed{\text{Costo total} = \text{Costos variables} + \text{Costos fijos}}$$

Consideremos el caso en el que el costo variable por unidad del artículo es constante. En este caso, los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si m denota el costo variable por unidad, entonces los costos variables totales al producir x unidades de artículos son de mx dólares. Si los costos fijos son de b dólares, se desprende que el costo total y_c (en dólares) de producir x unidades está dado por

Costo total = Costos totales variables + Costos fijos

$$y_c=mx+b$$

La ecuación anterior es un ejemplo de un modelo de costo lineal. La gráfica de la ecuación es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuya ordenada al origen da los costos fijos.

Ejemplo 9
(Modelo de costo lineal) El costo variable de procesar un kg. de granos de café es de 50¢ y los costos fijos por día son de $300.
a) Da la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica
b) Determina el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución

a. Si y_c representa el costo (en dólares) de procesar x kg. de granos de café por día, se sigue que de acuerdo al modelo lineal, tenemos

$$y_c=mx+b$$

en donde m representa el costo variable por unidad y b es el costo fijo. En nuestro caso, $m = 50¢ = \$0.50$ y $b = \$300$. Por tanto

$$y_c = 0.5x + 300$$

Con el objeto de dibujar la gráfica de la función, primero encontramos dos puntos sobre ella

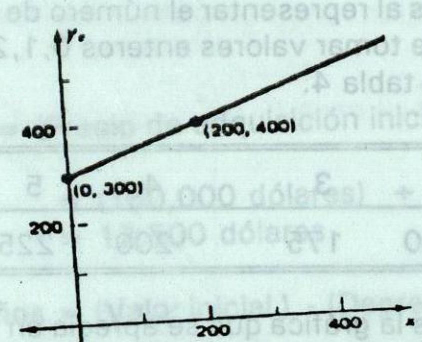

Fig. 18

Haciendo $x=0$ en la ecuación anterior, tenemos que $y=300$; haciendo $x=200$ en la ecuación anterior, tenemos $y_c=0.5(200)+300=400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación de costo anterior son (0,300) y (200, 400). Graficando estos dos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 18. Nótese que la porción relevante de la gráfica está situada por completo en el primer cuadrante porque x y y_c no pueden ser cantidades negativas.

b. Sustituyendo $x=1000$ en la ecuación, obtenemos

$$y_c = 0.5(1000) + 300 = 800$$

En consecuencia, el costo de procesar 1000 kg. de granos de café al día será de $800.

Ejemplo 10

(Modelo de costos) El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $350 mientras que cuesta $600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determina la relación entre el costo total y_c de producir "x" máquinas de escribir al día y dibuja su gráfica.

Solución

Se nos han dado los puntos (10, 350) y (20, 600) que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la línea que une estos dos puntos es

$$m=\frac{600-350}{20-10}=\frac{250}{10}=25$$

Usando la forma punto-pendiente, advertimos que la ecuación requerida de la línea recta (del modelo de costo lineal) con pendiente $m=25$ y que pasa por el punto (10,350) es

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y_c-350=25(x-10)=25x-250;$$

es decir,

$$y_c=25x+100$$

La gráfica de la ecuación anterior en este caso no es una línea recta continua porque no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable x sólo puede tomar valores enteros 0,1,2,3,4,5... los valores correspondientes de y_c se dan en la tabla 4.

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y_c	100	125	150	175	200	225	250	...

Graficando estos puntos, obtenemos la gráfica que se aprecia en la figura 19. Nótese que la gráfica consta de puntos (discretos) separados mas bien de una línea recta continua.

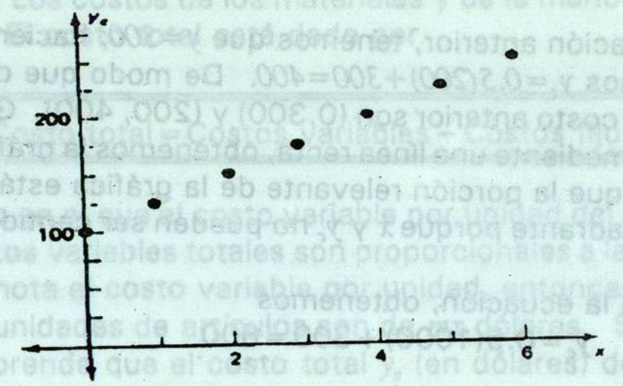

Fig. 19

Depreciación en línea recta

Cuando una compañía compra equipo o maquinaria, registra el valor de tal equipo como uno de los activos en su balance general. Al pasar los años este valor debe decrecer porque el equipo lentamente se desgasta o se hace obsoleto. Esta reducción gradual en el valor de un activo se conoce como depreciación. Uno de los métodos ordinarios para calcular la cantidad de depreciación es reducir el valor por una cantidad constante cada año, de tal manera que el valor se reduzca a valores de desecho al término de la vida útil estimada para el equipo. Esto se denomina depreciación en línea recta. Tenemos que

Tasa de depreciación (por año)
= (Valor inicial - valor de desecho) ÷ (Vida útil en años)

Ejemplo 13

(Depreciación) Una empresa compra maquinaria por $150,000. Se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho cero. Determina la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Solución

Depreciación por año = (Precio de adquisición inicial) ÷ (Vida útil en años)

= (150,000 dólares) ÷ (12 años)
= 12,500 dólares

Valor después de x años = (Valor inicial) - (Depreciación por año) (Número de años)

= (150,000 dólares) - (12,500 dólares por año)(x años)
= 150,000-12,500x dólares

La gráfica de esta relación aparece en la figura 21.

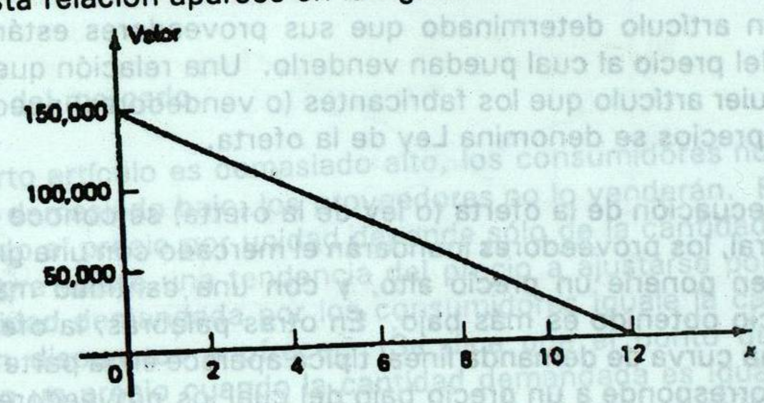

Fig. 21

Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de la demanda. La ley más simple es una relación del tipo

$$p=mx+b$$

en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama la curva de demanda. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Estos nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Es un hecho perfectamente conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda de la ecuación anterior es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la figura 22. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación anterior sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

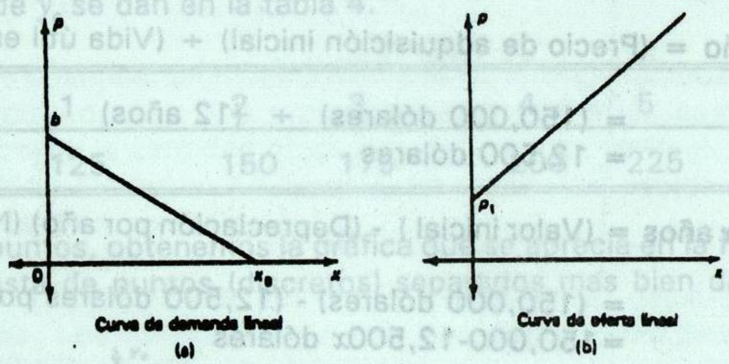

Fig. 22

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina Ley de la oferta.

La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como curva de la oferta. En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de demanda lineal típica aparece en la parte (b) de la figura 25. El precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

Ejemplo 14

(Demanda) Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de \$25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de \$20 a cada rasuradora eléctrica. Determina la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución

Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y) los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas.

$x=20,\ p=25$ y $x=30,\ p=20$

De modo que los puntos son (20,25) y (30,20). Dado que la ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos (20,25) y (30,20). La pendiente de la línea que une estos puntos es

$$m=\frac{20-25}{30-20}=\frac{5}{10}=-\frac{5}{10}=-0.5$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación lineal de la línea que pasa por (20,25) con pendiente $m=-0.5$ es

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Dado que $y=p$, tenemos que

$$p-25=-0.5(x-20)$$
$$p=-0.5x+35$$

que es la ecuación de demanda requerida. (Véase la fig. 23)

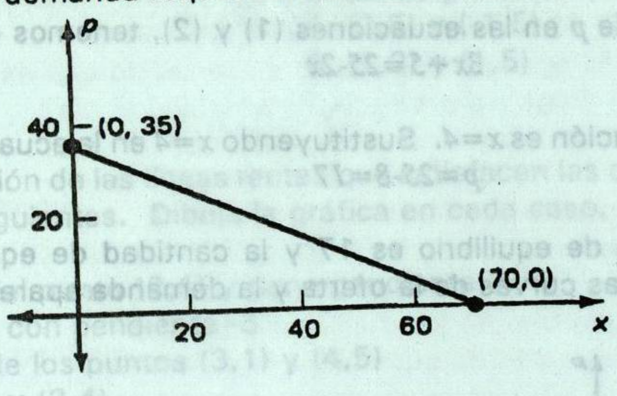

Fig. 23

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el punto de equilibrio del mercado ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda. (Véase la fig. 24)

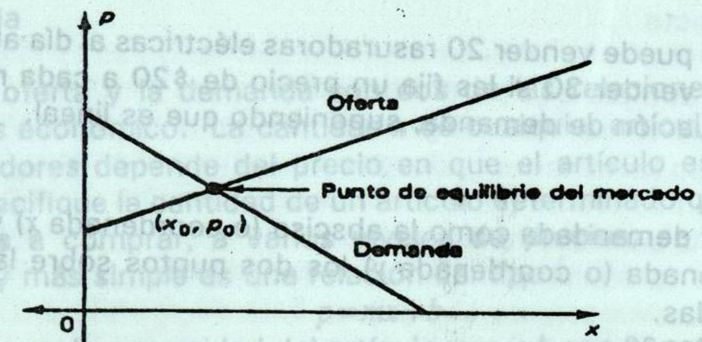

Fig. 24

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y la demanda simultáneamente para p y x. Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio sólo tienen sentido cuando no son negativas.

Ejemplo 15
Determina el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y la demanda siguientes

$$D: p=25-2x \qquad (1)$$
$$S: p=3x+5 \qquad (2)$$

Solución
Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$3x+5=25-2x$$

Fácilmente se ve que la solución es $x=4$. Sustituyendo $x=4$ en la ecuación (1), resulta

$$p=25-8=17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y la demanda aparecen en la figura 25.

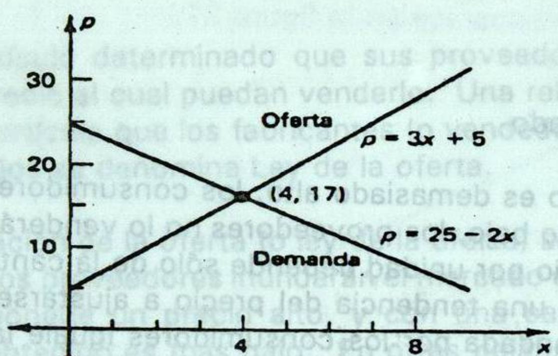

Fig. 25

Ejemplo 16
Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente

$$D: 3p+5x=22 \qquad (3)$$
$$S: 2p-3x=2 \qquad (4)$$

determina los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Solución
Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales en las variables x y p. Resolvamos este sistema por el método de suma y resta. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 3 y los dos miembros de la ecuación (4) por 5, obtenemos

$$9p+15x=66$$
$$10p-15x=10$$

Enseguida sumamos estas dos ecuaciones y simplificamos

$$9p+15x+10p-15x=66+10$$
$$19p=76$$

Así que, $p=4$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (3), obtenemos

$$3(4)+5x=22$$

Por lo tanto, $x=2$. El punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p=4$ y $x=2$.

Ejercicio 1.2

Determina las pendientes de las líneas que unen cada pareja de puntos.

1. (2,1) y (5,7)
2. (5,-2) y (1,-6)
3. (2,-1) y (4,-1)
4. (3,5) y (-1,5)
5. (-3,2) y (-3,4)
6. (1,2) y (1,5)

Encuentra la ecuación de las líneas rectas que satisfacen las condiciones de cada uno de los ejercicios siguientes. Dibuja la gráfica en cada caso.

7. Pasa a través del punto (2,1) y tiene pendiente 5.
8. Pasa por (1,-2) con pendiente -3
9. Pasa a través de los puntos (3,1) y (4,5)
10. Pasa por (2,1) y (3,4)
11. Pasa a través de los puntos (3,-2) y (3,7)
12. Tiene pendiente -2 y ordenada al origen 5

13. Función de costo.
Una empresa que fabrica radio-receptores tiene costos fijos de \$3000 y el costo de la mano de obra y el material es de \$15 por radio. Determina la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de radios producidos. Si cada radio-receptor se vende por \$25, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades.