14. (Función de ingresos)
Un fabricante puede vender 300 unidades de su producto al mes a un prec de $20 por unidad y 500 unidades a un precio de $15 por unidad. Expresa demanda del mercado x (el número de unidades que pueden venderse al me como una función del precio por unidad, suponiendo que es una función linea Expresa los ingresos como:
a. Una función del precio; b. Una función de x.

15. (Función de costo)
El azúcar tiene un costo de 25¢ para cantidades hasta de 50 libras y de 20 por libra extra en el caso de cantidades por encima de las 50 libras. Si $C(x)$ denota el costo de x libras de azúcar, representa $C(x)$ por medio de expresione algebraicas apropiadas y bosqueja su gráfica.

16. (Modelo de costo lineal)
El costo variable de fabricar una mesa es de $7 y los costos fijos son de $15 al día. Determina el costo total y_c de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el cost de fabricar 100 mesas al día?

17. (Modelo de costo lineal)
El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de $700 y el de 120 cámara a la semana es de $800.
a. Determina la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.
b. ¿Cuáles son los costos fijos y variable por unidad?

18. (Modelo de costo lineal)
A una compañía le cuesta $75 producir 10 unidades de cierto artículo al día y $120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.
a. Determina la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.
b. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?
c. ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

19. (Análisis del punto de equilibrio)
Los costos fijos por producir cierto artículo son de $5000 al mes y los costos variables son de $3.50 por unidad. Si el productor vende cada uno a $6.00, responde a cada uno de los incisos siguientes:
a. Encuentra el punto de equilibrio.
b. Determina el número de unidades que deben producirse y venderse al mes para obtener una utilidad de $1000 mensuales.
c. Obtén la pérdida cuando sólo 1500 unidades se producen y venden cada mes.

20. (Análisis del punto de equilibrio)
El costo de producir x artículos está dado por $y_c=2.8x+600$ y cada artículo se vende a $4.00
a. Encuentra el punto de equilibrio
b. Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

21. (Depreciación)
Una empresa compró maquinaria nueva por $15000. Si se deprecia linealmente en $750 al año y si tiene un valor de desperdicio de $2250, ¿por cuánto tiempo estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de t años de uso y después de 6 años de uso?

22. (Depreciación)
La señora Olivares compró un televisor nuevo por $800 que se deprecia linealmente cada año un 15% de su costo original. ¿Cuál es el valor del televisor después de t años y después de 6 años de uso?

23. (Ecuación de la oferta)
A un precio de $2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8000 vestidos al mes; a $4 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 vestidos al mes. Determina la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

24. (Relación de la demanda)
Un fabricante de herramientas puede vender 3000 martillos al mes a $2 cada uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 martillos a $2.75 cada uno. Determina la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

25. (Punto de equilibrio del mercado)
Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a $30 por unidad y 250 unidades a $27 por unidad. La ecuación de la oferta para tal artículo es $6p=x+48$.
a. Determina la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es lineal.
b. Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio.

1.3 Funciones Cuadráticas y Parábolas

Una función de la forma

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

con a, b y c constantes, se denomina función cuadrática. El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de una función cuadrática es una curva denominada parábola.

La función cuadrática más simple se obtiene haciendo b y c iguales a cero, en cuyo caso obtenemos $f(x)=ax^2$. Las gráficas comunes de esta función en los casos en que a es positiva o negativa aparecen en la figura 26. El punto más bajo de la gráfica cuando $a>0$ ocurre en el origen, mientras que este mismo es el punto más alto si $a<0$. En cualquiera de los dos casos, el punto se denomina vértice de la parábola.

La función cuadrática general $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene una gráfica idéntica en forma y tamaño a la correspondiente a $y=ax^2$; la única diferencia es que el vértice de $f(x)=ax^2+bx+c$ está trasladado afuera del origen.

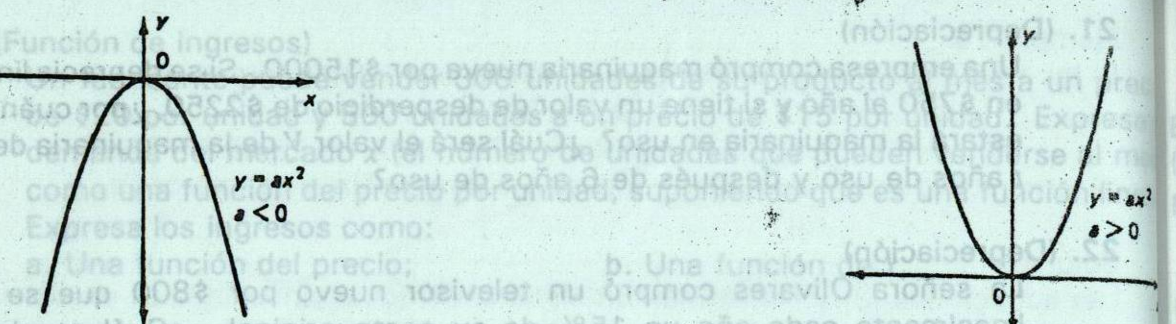


Fig. 26

Teorema 1
La gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ es una parábola que se abre hacia arr si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$. Su vértice (que es el punto más bajo si $a>0$ y el pur más alto si $a<0$) es el punto con coordenadas

$$x=-\frac{b}{2a} \quad y \quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Gráficas características de la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$ se advierten en la figu 27.

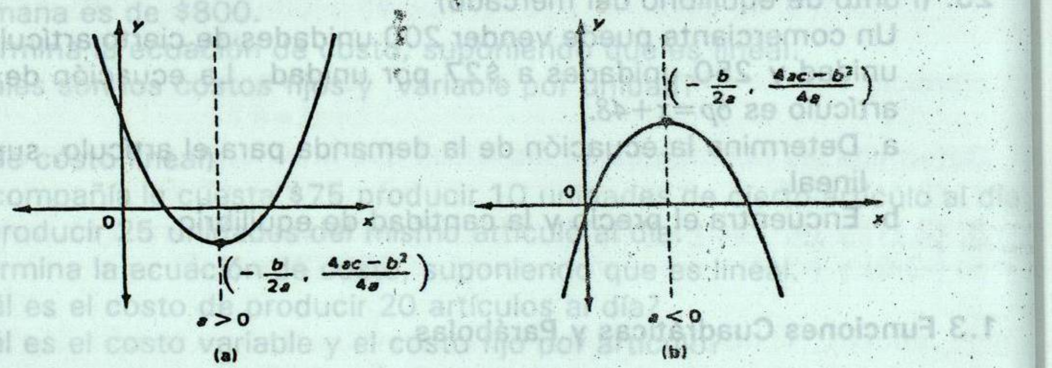


Fig. 27

Observaciones.

1. **Si $b=c=0$, la función cuadrática se reduce a $f(x)=ax^2$. Las coordenadas d vértice dadas en el teorema 1 se reducen a $x=y=0$, que es consistente co nuestras afirmaciones anteriores.**

2. **La coordenada y del vértice también puede encontrarse sustituyendo el val $x=-b/2a$ en la ecuación $y=ax^2+bx+c$ de la parábola. Con frecuencia esto es má conveniente que usar la fórmula para y dada en el teorema 1.**

3. **La manera más fácil de probar el teorema 1 es utilizando el método d completar el cuadrado. No lo probaremos aquí.**

Ejemplo 1
Bosqueja la parábola $y=2x^2-4x+7$ y encuentra su vértice.

Comparando la ecuación

$$y=2x^2-4x+7$$

con la función cuadrática estándar

$$y=ax^2+bx+c$$

tenemos que $a=2$, $b=-4$ y $c=7$. La coordenada x del vértice es

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(2)}=1$$

Con objeto de encontrar la coordenada y del vértice, lo mas sencillo es sustituir $x=1$ en la ecuación de la parábola dada

$$y=2(1)^2-4(1)+7=5$$

De modo que el vértice está en el punto (1,5)

En forma alternativa, podríamos usar la fórmula dada en el teorema 1.

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(2)(7)-(-4)^2}{4(2)}=\frac{56-16}{8}=5$$

Dado que $a=2>0$, la parábola se abre hacia arriba; esto es, el vértice (1,5) es el punto más bajo de la parábola. La gráfica de esta parábola puede bosquejarse graficando algunos puntos (x,y) situados sobre ella. Los valores de y que corresponden a los valores escogidos de x aparecen en la tabla 5. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 28. (Obsérvese que la gráfica de este ejemplo corta el eje y en el punto (0,7) pero que no corta al eje x en ningún punto. A menudo es útil al dibujar la gráfica de alguna función dada encontrar los puntos en que su gráfica corta los ejes de coordenadas).

TABLA 3

x	−1	0	1	2	3
y	13	7	5	7	13

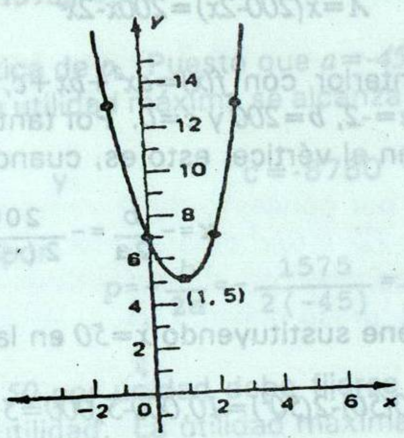


Figura 28

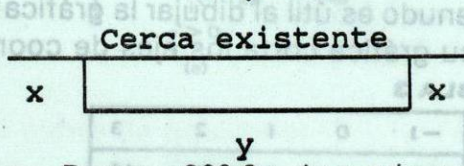
Como establecimos antes, el vértice de la parábola representa el punto más bajo cuando $a>0$ o el punto más alto si $a<0$. Se sigue, por tanto, que en el caso de que $a>0$, la función $f(x)=ax^2+bx+c$ toma su valor mínimo en el vértice de la parábola correspondiente. Eso es, $f(x)$ es mínimo cuando $x=-b/2a$. Por otro lado, cuando $a<0$, la función $f(x)=ax^2+bx+c$ toma su valor máximo si $x=-b/2a$. Estos valores más grandes y más pequeños de $f(x)=ax^2+bx+c$ pueden obtenerse sustituyendo $x=-b/2a$ en $f(x)$.

Problemas en que se nos pide determinar los valores máximos y mínimos de ciertas funciones aparecen con frecuencia en las aplicaciones. Los estudiaremos con detalle en el capítulo 4. Sin embargo, algunos de estos problemas pueden resolverse apelando a las propiedades de las parábolas. Los ejemplos siguientes pertenecen a esta categoría.

Ejemplo 2
(Cercas) Un granjero tiene 200 metros de cerca con la cual puede delimitar un terreno rectangular. Un lado del terreno puede aprovechar una cerca ya existente. ¿Cuál es el área máxima que puede cercarse?

Solución
Denotemos los lados del terreno con x y y, como se indica en la figura siguiente, con el lado y paralelo a la cerca ya existente. Se sigue que la longitud de la nueva cerca es $2x+y$, que debe ser igual a los 200 metros disponibles.

$$2x+y=200$$



El área encerrada es $A=xy$. Pero $y=200-2x$, de modo que
$$A=x(200-2x)=200x-2x^2$$

Comparando la expresión anterior con $f(x)=ax^2+bx+c$, advertimos que A es una función cuadrática de x, con $a=-2$, $b=200$ y $c=0$. Por tanto, dado que $a<0$, la función cuadrática tiene un máximo en el vértice, esto es, cuando

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{200}{2(-2)}=50$$

El valor máximo de A se obtiene sustituyendo $x=50$ en la ecuación anterior.

$$A=200(50)-2(50^2)=10{,}000-5{,}000=5{,}000$$

El área máxima que puede encerrarse es de 5000 metros cuadrados. Las dimensiones de esta área máxima son $x=50$ y $y=100$ metros. (Recuerda que $y=200-2x$)

Ejemplo 3
(Decisiones sobre fijación de precios) La demanda mensual, x, de cierto artículo al precio de p dólares por unidad está dada por la relación
$$x=1350-45p$$

El costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de \$5 por unidad y los costos fijos son de \$2000 al mes. ¿Qué precio por unidad p deberá fijarse al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual?

Solución
El costo total C (en dólares) de producir x unidades al mes es
$$C = \text{Costos variables} + \text{Costos fijos}$$
$$= 5x+2000$$

La demanda x está dada por
$$x=1350-45p$$

Sustituyendo este valor de x en C, resulta que
$$C=5(1350-45p)+2000$$
$$=8750-225p$$

El ingreso R (en dólares) obtenido por vender x unidades a p dólares por unidad es
$$R = \text{Precio por unidad } x \text{ Número de unidades vendidas}$$
$$= px=p(1350-45p)$$
$$=1350p-45p^2$$

La utilidad P (en dólares) está dada entonces por la diferencia entre el ingreso y el costo
$$P=R-C$$
$$=-45p^2+1350p-(8750-225p)$$
$$=-45p^2+1575p-8750$$

La utilidad P es una función cuadrática de p. Puesto que $a=-45<0$, la gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y la utilidad máxima se alcanza en el vértice. En este caso, tenemos que
$a=-45$, $b=1575$ y $c=-8750$

El vértice de la parábola está dado por
$$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{1575}{2(-45)}=\frac{1575}{90}=17.5.$$

En consecuencia un precio $p=\$17.50$ por unidad debe fijarse al consumidor con el propósito de obtener una máxima utilidad. La utilidad máxima será dada por
$$P=-45(17.5)^2+1575(17.5)-8750$$
$$=5031.25$$
ó \$5031.25 al mes

Ejemplo 4
(Decisiones sobre fijación de rentas) El señor Alonso es propietario de un edificio de departamentos con 60 habitaciones. El puede rentarlas todas si fija una renta mensual de $200 por habitación. A una renta más alta, algunas habitaciones quedarán vacías. En consecuencia, por cada incremento de la renta de $5, una habitación quedará vacía, sin posibilidad alguna de rentarla. Determina la relación funcional entre el ingreso mensual total y el número de habitaciones vacías. ¿Qué renta mensual maximizaría el ingreso total? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución
Sea x el número de unidades vacías. El número de departamentos rentados es entonces $60-x$ y la renta mensual por habitación es $(200+5x)$ dólares. Si R denota el ingreso mensual total (en dólares), se sigue que

$$\begin{aligned} R &= \text{(Renta por unidad)(Número de unidades rentadas)} \\ &= (200+5x)(60-x) \\ &= -5x^2+100x+12{,}000 \end{aligned}$$

El ingreso mensual total R es una función cuadrática de x con
$a=-5$, $b=100$ y $c=12{,}000$

La gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo (dado que $a<0$) y su vértice es el punto máximo. El vértice está dado por

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{100}{2(-5)}=10$$

$$R=-5(10)^2+100(10)+12{,}000=12{,}500$$

En consecuencia, si 10 unidades están desocupadas, los ingresos son máximos. La renta por habitación es entonces de $(200+5x)$ dólares ó $250 y el ingreso total es de $12,500 al mes.

Ejercicio 3.1
Bosqueja las parábolas siguientes y determina sus vértices

1. $y=2x^2+3x-1$
2. $y=4x-x^2$
3. $y=3-x-3x^2$
4. $y=4x^2+16x+4$

5. (Ingreso máximo)
El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $R(x)=12x-0.01x^2$ dólares. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

6. (Utilidad máxima)
La utilidad $P(x)$ obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto producto está dada por

$$P(x)=60x-x^2$$

Determina el número de unidades que deben producirse y venderse con objeto de maximizar la utilidad. ¿Cuál es esta utilidad máxima?

7. (Ingresos y utilidad máximas)
Una empresa tiene costos fijos mensuales de $2000 y el costo variable por unidad de su producto es de $25.
a. Determina la función de costo.
b. El ingreso R obtenido por vender x unidades está dado por $R(x)=60x-0.01x^2$. Determina el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. ¿Cuál es este ingreso máximo?
c. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

8. (Costo mínimo)
El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x)=20-0.6x+0.0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

9. (Cercas)
Un granjero tiene 500 yardas de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?

10. (Fijación del precio de un libro)
Si un editor fija el precio de un libro en $20 cada uno, venderá 10,000 ejemplares. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 copias. ¿Qué precio debería fijar a cada libro de modo que el ingreso sea máximo? ¿Cuál es el valor de este ingreso máximo?

1.4 Más Funciones Elementales

En esta sección, estudiaremos algunas funciones simples de uso e interés común.

Funciones potenciales

Una función de la forma

$$f(x)=ax^n$$

en donde a y n son constantes distintas a cero, se denomina función potencial. Consideremos algunos casos especiales de funciones de este tipo.

1. $n=2$:
En este caso $f(x)=ax^2$, y tenemos un caso especial de las funciones cuadráticas expuestas en la sección 3. La gráfica de $y=ax^2$ es una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$.

2. $n=½$:

Ahora, $f(x)=ax^{1/2}=a\sqrt{x}$. La gráfica es la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. Si $a>0$, la gráfica es la mitad superior de la parábola, mientras que si $a<0$, es la mitad inferior. En consecuencia, la gráfica sube o baja hacia la derecha dependiendo de si $a>0$ ó $a<0$. El dominio de f es el conjunto de los números reales no negativos. (Véase la fig. 29)

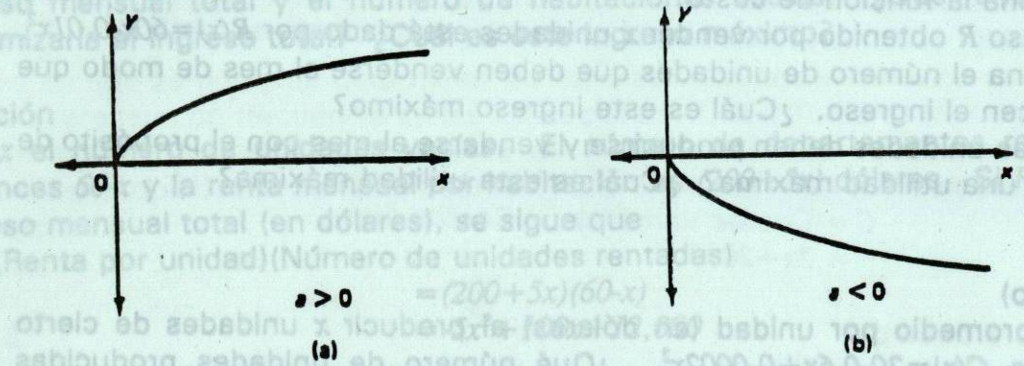


Fig. 29

3. $n=-1$:

En este caso, $f(x)=a/x$. El dominio de $f(x)$ consta de todos los números reales excepto cero. La figura 30 contiene las gráficas de $y=1/x$ y $y=-1/x$ (es decir, las correspondientes a $a=\pm 1$). La gráfica de $y=a/x$ cuando $a>0$ tiene una forma similar a la de $y=1/x$ y en el caso de que $a<0$ es parecida a la forma de $y=-1/x$. La gráfica de $y=a/x$ se denomina una hipérbola rectangular. A medida que x se acerca a cero, el denominador de $f(x)=a/x$ se hace muy pequeño, de modo que $f(x)$ tiende a ser numéricamente muy grande. Puede llegar a ser grande y positivo o grande y negativo, dependiendo de los signos de a y de x. Estas posibilidades se ven claras en la figura 30. Puede advertirse en la gráfica que cuando x se hace muy grande (positiva o negativamente), $f(x)$ se acerca cada vez más a cero; sin embargo, nunca es igual a cero. Se dice que los ejes de coordenadas son asíntotas de la gráfica.

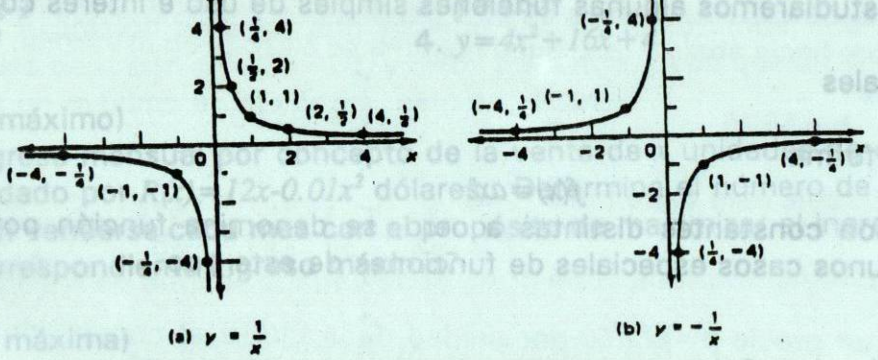


Fig. 30

4. $n=3$:

Ahora, $f(x)=ax^3$. La gráfica de $f(x)$ es la curva cúbica que aparece en la figura 31. El dominio es igual al conjunto de todos los números reales.

La figura 31 compara las gráficas de la función $y=ax^n$ para varios valores de n. Sólo se consideró el caso en que $a>0$, y las gráficas se dibujaron, en el cuadrante en que x y y no son negativas. (En administración y economía, por lo regular estamos interesados en variables que sólo toman valores no negativos).

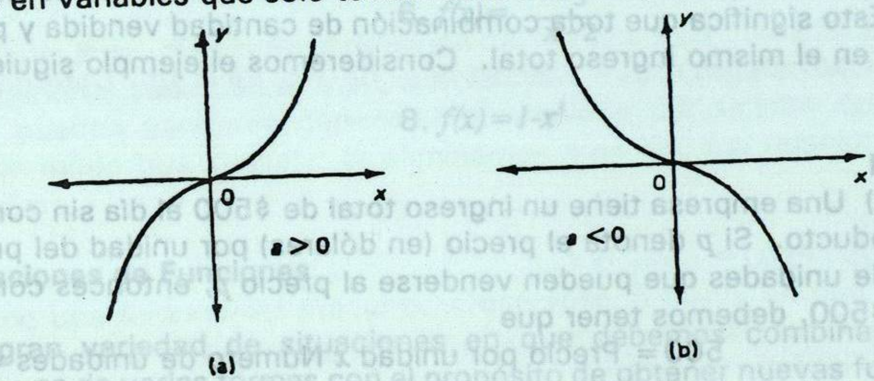


Fig. 31

Observemos que todas las gráficas pasan por el punto $(1,a)$. Cuando $n>1$, la gráfica sube al movernos hacia la derecha y, más aún, crece más y más pronunciadamente a medida que x se incrementa. Las funciones $y=ax^2$ y $y=ax^3$ que ya habíamos considerado son ejemplos que caen en esta categoría. El caso $n=1$ corresponde a la línea recta $y=ax$ que pasa por el origen y por el punto $(1,a)$.

Cuando $0<n<1$, la gráfica de $y=ax^n$ crece al desplazarnos hacia la derecha, pero este crecimiento es menos pronunciado a medida que x se incrementa. La función $y=ax^{1/2}$, que, como vimos antes tiene una gráfica que es la mitad de una parábola, es un ejemplo de este tipo.

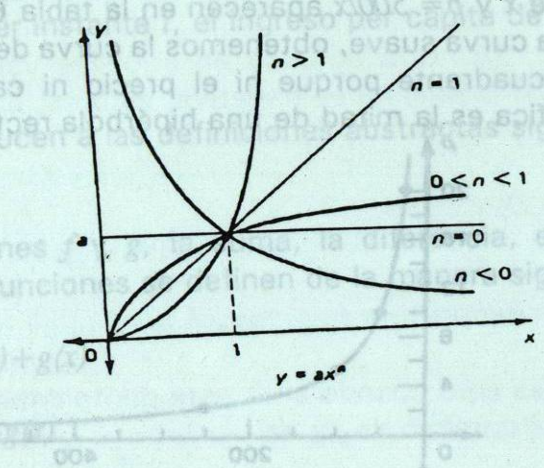


Fig. 32