El caso $n=0$ corresponde a una línea recta horizontal. Por último, si $n<0$, la función $y=ax^n$ posee una gráfica que baja al movernos hacia la derecha y es asintótica a los ejes x y y. La hipérbola rectangular, con ecuación $y=ax^{-1}$, es un ejemplo de una de tales gráficas.

Existen situaciones en la administración en que, en un rango de interés dado, la relación de demanda entre cantidad y precio se basa en una variación inversa; esto es, la cantidad vendida o demandada en el mercado es inversamente proporcional al precio. Esto significa que toda combinación de cantidad vendida y precio por unidad resultará en el mismo ingreso total. Consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1
(Ingresos) Una empresa tiene un ingreso total de \$500 al día sin considerar el precio de su producto. Si p denota el precio (en dólares) por unidad del producto y x es el número de unidades que pueden venderse al precio p, entonces con el propósito de obtener \$500, debemos tener que

$$500 = \text{Precio por unidad} \times \text{Número de unidades vendidas} = px$$

Es decir,

$$p=\frac{500}{x}$$

Tabla 6

x	25	50	100	125	250	500
p	20	10	5	4	2	1

Algunos valores de x y $p=500/x$ aparecen en la tabla 6. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la curva de la figura 33. Restringimos la gráfica al primer cuadrante porque ni el precio ni cantidad vendidos pueden ser negativos. La gráfica es la mitad de una hipérbola rectangular.

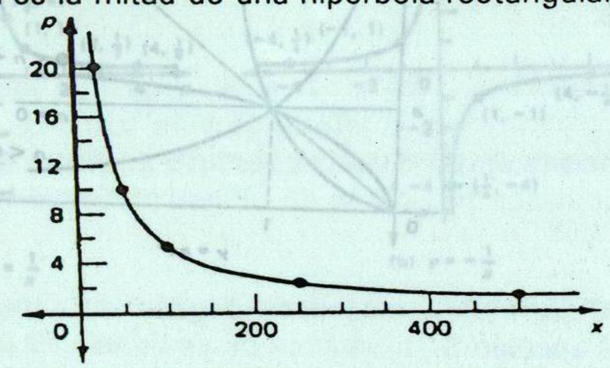

Fig. 33

Ejercicio 1.4

Determina los dominios de las funciones siguientes y bosqueja sus gráficas

1. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$
2. $f(x)=2-\sqrt{9-x^2}$
3. $g(x)=-\sqrt{3-x}$
4. $f(x)=\sqrt{x-2}$
5. $f(x)=1/x$
6. $f(x)=\frac{-3}{x-2}$
7. $f(x)=x^3$
8. $f(x)=1-x^3$

1.5 Combinaciones de Funciones

Existe una gran variedad de situaciones en que debemos combinar dos o más funciones en una de varias formas con el propósito de obtener nuevas funciones. Por ejemplo, denotemos con $f(t)$ y $g(t)$ los ingresos de una persona de dos fuentes distintas de tiempo t; ahora, el ingreso combinado de las dos fuentes es $f(t)+g(t)$. De las dos funciones f y g, en esta forma hemos obtenido una tercera función, la suma de f y g. Si $C(x)$ denota el costo de producir x unidades de cierto artículo y $R(x)$ es el ingreso obtenido de la venta de x unidades, la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x unidades está dada por $P(x)=R(x)-C(x)$. La nueva función P así obtenida es la diferencia de las dos funciones R y C.

Si $P(t)$ indica la población de un país e $I(t)$ es el ingreso per cápita en el momento t, el ingreso nacional de tal país está dado por $P(t)I(t)$. Este es un ejemplo en el que se forma una nueva función como el producto de dos funciones. De manera análoga, podemos definir el cociente de dos funciones: Si $N(t)$ y $P(t)$ indican el ingreso nacional y la población en cualquier instante t, el ingreso per cápita de tal país está dado por $N(t)/P(t)$.

Estos ejemplos nos conducen a las definiciones abstractas siguientes

Definición

Dadas dos funciones f y g, la suma, la diferencia, el producto y el cociente de esas funciones se definen de la manera siguiente.

Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Diferencia: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Producto: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, con tal de que $g(x)\neq 0$

Los dominios de las funciones suma, diferencia y producto son iguales a la parte común de los dominios de f y g, esto es, al conjunto de las x en las cuales tanto f como g están definidas. En el caso de la función cociente, el dominio es la parte común de los dominios de f y g excepto por aquellos valores de x en los cuales $g(x)=0$.

Ejemplo 1

Sea $f(x)=1/(x-1)$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Calcula $f+g$, $f\text{-}g$, $f\cdot g$, f/g y g/f. Determina el dominio en cada caso.

Solución

Tenemos:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}$$

$$(f\text{-}g)(x)=f(x)\text{-}g(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/(x-1)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{x}}{1/(x-1)}=\sqrt{x}\,(x-1)$$

Dado que su denominador se hace cero cuando $x=1$, $f(x)$ no está definida si $x=1$, de modo que el dominio de f es igual al conjunto de todos los reales excepto 1.

De manera similar, $g(x)$ está definida en aquellos valores de x para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa, esto es, para $x\geq 0$. Así que

D_f:$\{x|x\neq 1\}$ y D_g:$\{x|x\geq 0\}$

La parte común de D_f y D_g es

$\{g|x\geq 0$ y $x\neq 1\}$

Este conjunto es el dominio de $f+g$, $f\text{-}g$ y $f\cdot g$.

Dado que $g(x)=\sqrt{x}$ es cero cuando $x=0$, este punto debe excluirse del dominio de f/g. En consecuencia, el dominio de f/g es

$\{x|x>0$ y $x\neq 1\}$

Puesto que $f(x)$ nunca es cero, el dominio de g/f es otra vez la parte común de D_f y D_g es decir el conjunto (1). Es evidente de la fórmula algebraica de $(g/f)(x)$ que esta función está bien definida cuando $x=1$. A pesar de esto, es necesario excluir $x=1$ del dominio de esta función, dado que g/f sólo puede definirse en aquellos puntos en que tanto g como f estén definidas.

Otra forma en que dos funciones pueden combinarse y producir una tercera función se conoce como composición de funciones. Consideremos la situación siguiente.

El ingreso mensual R de una empresa depende del número x de unidades que produce y vende. En general, podemos afirmar que $R=f(x)$. Por lo regular, el número x de unidades que pueden venderse depende del precio p por unidad que se fija al consumidor, de modo que $x=g(p)$. Si eliminamos x de las dos relaciones $R=f(x)$ y $x=g(p)$, tenemos

$R=f(x)=f(g(p))$

Esta da R como una función del precio p. Obsérvese la forma en que R se obtuvo como una función de p utilizando $g(p)$ como el argumento de la función f. Estos nos conduce a la definición siguiente

Definición

Sean f y g dos funciones. Sea x en el dominio de g de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de f. Entonces la composición $f\circ g$ (léase f compuesta con g) se define por

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

Ejemplo 2

Sea $f(x)=1/(x-2)$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Evalúa:

a. $(f\circ g)(9)$;
b. $(f\circ g)(4)$;
c. $(f\circ g)(x)$;
d. $(g\circ f)(6)$;
e. $(g\circ f)(1)$;
f. $(g\circ f)(x)$.

a. $g(9)=\sqrt{9}=3$. Por tanto,
$(f\circ g)(9)=f(g(9))=f(3)=1/(3-2)=1$

b. $g(4)=\sqrt{4}=2$. Tenemos $(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=1/(2-2)$

Esto no esta definido. El valor $x=4$ no pertenece al dominio de $f\circ g$, de modo que $(f\circ g)(4)$ no puede determinarse.

c. $g(x)=\sqrt{x}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

d. $f(6)=1/(6-2)=1/4;$

$(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(1/4)=\sqrt{\frac{1}{4}}=1/2$

e. $f(1)=1/(1-2)=-1; (g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=\sqrt{-1}$ el cual no es un número real. No podemos evaluar $(g\circ f)(1)$ porque 1 no pertenece al dominio de $g\circ f$.

f. $f(x)=1/(x-2)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{1}{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

El dominio de $f\circ g$ está dado por

$D_{f\circ g}=\{x|x\in D_g$ y $g(x)\in D_f\}$

Es posible demostrar que, para las funciones del ejemplo 2

$D_{f\circ g}=\{x|x\geq 0$ y $x\neq 4\}$

y también

$D_{g\circ f}=\{x|x>2\}$

Ejemplo 3

(Ingresos) El ingreso mensual R obtenido por vender zapatos modelo de lujo es u
función de la demanda x del mercado. Obsérvese que, como una función del preci
p por par, el ingreso mensual y la demanda son

$R=300p-2p^2$ y $x=300-2p$

¿Cómo depende R de x?

Solución

Si $R=f(p)$ y $p=g(x)$, R puede expresarse como una función de x por medio de l
composición $R=(f\circ g)(x)=f(g(x))$. La función $f(p)$ está dada por $R=f(p)=300p-2p^2$. Si
embargo, con objeto de obtener $g(x)$, debemos resolver la relación de demand
$x=300-2p$ de modo que expresemos p como función de x. Obtenemos así

$p=½(300-x)$

Sustituimos este valor de p en R y simplificamos

$R=300p-2p^2$

$=300\cdot ½(300-x)-2\cdot ¼(300-x)^2$

$=(150)(300)-150x-½(300^2-600x+x^2)$

$=150x-0.5x^2$

Este es el resultado requerido, que expresa el ingreso mensual R como una función d
la demanda x en el mercado.

Ejercicio 1.5

Calcula la suma, la diferencia, el producto y el cociente de las dos funciones f y g en cada uno de los ejercicios siguientes. Determina los dominios de las funciones resultantes.

1. $f(x)=x^2;$ $g(x)=\frac{1}{x-1}$

2. $f(x)=x^2+1;$ $g(x)=\sqrt{x}$

3. $f(x)=\sqrt{x-1};$ $g(x)=\frac{1}{x+2}$

4. $f(x)=1+\sqrt{x};$ $g(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

5. $f(x)=(x+1)^2;$ $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$

Dadas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, evalúa cada una de las composiciones siguientes

6. $(f\circ g)(5)$
7. $(g\circ f)(3)$
8. $(f\circ g)(5/4)$
9. $(g\circ f)(-2)$
10. $(f\circ g)(½)$
11. $(g\circ f)(⅓)$
12. $(f\circ g)(2)$
13. $(g\circ f)(1)$

Determina $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ en los ejercicios siguientes

14. $f(x)=x^2;$ $g(x)=1+x$

15. $f(x)=\sqrt{x+1};$ $g(x)=x^2$

16. $f(x)=\frac{1}{x+1};$ $g(x)=\sqrt{x+1}$

17. $f(x)=2+\sqrt{x};$ $g(x)=(x-2)^2$

18. $f(x)=x^2+2;$ $g(x)=x-3$

19. (Función de ingreso)
La demanda x de cierto artículo está dada por $x=2000-15p$, en donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas de este artículo está dado por $R=2000-15p^2$. ¿Cómo depende R de x?

20. (Función de ingreso)
Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad, en donde $20p+3q=600$. Como una función de la cantidad q demandada en el mercado, el ingreso semanal total está dado por $R=30q-0.15q^2$. ¿En qué forma depende R del precio p?

CAPITULO 2
LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCION

El "límite" de una función, es una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, y que lo distinguen de otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría y la trigonometría.

La discusión rigurosa de este concepto puede parecer difícil y compleja, por lo que nos limitaremos a una discusión intuitiva del concepto del "límite", ya que fue precisamente así, como sucedió la evolución histórica de este concepto.

Aquellos estudiantes que decidan cursar una Licenciatura de Ciencias o de Ingeniería, tendrán la oportunidad de revisar formalmente el concepto del "límite" en su curso de Cálculo Diferencial.

Existen muchos problemas del mundo real que pueden ser descritos por modelos matemáticos que establecen una relación funcional entre dos variables donde el valor de una de ellas, depende de los valores que tome la otra, esta última llamada variable independiente.

En este estudio nos va a interesar el comportamiento de la función (de la variable dependiente), cuando la variable independiente se aproxima, repito, se aproxima a un valor dado, pero sin llegar a tomar dicho valor, por ejemplo: si "x" se aproxima a 5, la "x" puede tomar valores de 4.9, 4.99, 4.999...... ó 5.01, 5.001, 5.0001..... pero no tomará el valor de 5, ésto es lo que significa aproximarse a un valor dado.

Cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado, la función puede aproximarse a cierto valor, o no aproximarse a ninguno. Si el caso es el primero, en el que la función se aproxima a cierto valor, decimos que el valor al cual se aproxima la función es el límite (L) de la misma, cuando la variable independiente se aproxima al valor dado y se representa en la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lo anterior se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" ($x \to a$), es L.

El segundo caso, cuando la función no se aproxima a ningún valor, decimos que el límite no existe.

La forma en que se relacionan dos variables nos puede conducir a funciones de muy diferentes tipos, y el cálculo de los límites puede ser difícil y complicado.