19. (Función de ingreso)
La demanda x de cierto artículo está dada por $x=2000-15p$, en donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas de este artículo está dado por $R=2000-15p^2$. ¿Cómo depende R de x?

20. (Función de ingreso)
Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad, en donde $20p+3q=600$. Como una función de la cantidad q demandada en el mercado, el ingreso semanal total está dado por $R=30q-0.15q^2$. ¿En qué forma depende R del precio p?

CAPITULO 2
LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCION

El "límite" de una función, es una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, y que lo distinguen de otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría y la trigonometría.

La discusión rigurosa de este concepto puede parecer difícil y compleja, por lo que nos limitaremos a una discusión intuitiva del concepto del "límite", ya que fue precisamente así, como sucedió la evolución histórica de este concepto.

Aquellos estudiantes que decidan cursar una Licenciatura de Ciencias o de Ingeniería, tendrán la oportunidad de revisar formalmente el concepto del "límite" en su curso de Cálculo Diferencial.

Existen muchos problemas del mundo real que pueden ser descritos por modelos matemáticos que establecen una relación funcional entre dos variables donde el valor de una de ellas, depende de los valores que tome la otra, esta última llamada variable independiente.

En este estudio nos va a interesar el comportamiento de la función (de la variable dependiente), cuando la variable independiente se aproxima, repito, se aproxima a un valor dado, pero sin llegar a tomar dicho valor, por ejemplo: si "x" se aproxima a 5, la "x" puede tomar valores de 4.9, 4.99, 4.999...... ó 5.01, 5.001, 5.0001..... pero no tomará el valor de 5, ésto es lo que significa aproximarse a un valor dado.

Cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado, la función puede aproximarse a cierto valor, o no aproximarse a ninguno. Si el caso es el primero, en el que la función se aproxima a cierto valor, decimos que el valor al cual se aproxima la función es el límite (L) de la misma, cuando la variable independiente se aproxima al valor dado y se representa en la siguiente forma:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Lo anterior se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" ($x\text{--}>a$), es L.

El segundo caso, cuando la función no se aproxima a ningún valor, decimos que el límite no existe.

La forma en que se relacionan dos variables nos puede conducir a funciones de muy diferentes tipos, y el cálculo de los límites puede ser difícil y complicado.

2.1 Concepto Intuitivo de Límite

El objetivo de este estudio, es apropiarse del concepto del límite de una función y aplicarlo a la solución de problemas y ejercicios sencillos.

Para que comprendas el concepto del límite de una función, te mostraremos un problema.

Problema 1

Un hombre acepta pagar una deuda en la siguiente forma:
El primer año el pago será de $12000 pesos, el segundo año el pago será de 0.9 de lo que pagó el primer año, el siguiente pago será 0.9 de lo que pagó el año anterior y así sucesivamente por "n" años.

A primera vista parece que el hombre no acabará de pagar nunca, lo cual es cierto, sin embargo, la cantidad total a pagar tiene un valor límite y no podrá ser mayor de esa cantidad, sin importar el número de años transcurridos incluso si $n \to \infty$.

Vamos a desarrollar la suma de pagos

n	1	2	3	n

$$Sn = 12000 + 12000(0.9) + 12000(0.9)(0.9) + \ldots + 12000(0.9)^{n-1}$$

Esto es algo que ya conoces, es una serie geométrica convergente, donde el primer término es 12000 la razón r = 0.9.

La fórmula para la suma de "n" términos de una serie geométrica, es la siguiente:

$$Sn = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

donde:
Sn = La suma de "n" términos
a_1 = Es el primer término de la serie
r = Es la razón

El problema en sí, es calcular el valor al que tiende esta suma, cuando el número de años "n" tiende a infinito. Esto lo podemos expresar en la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{12000(1-0.9^n)}{1-0.9}$$

Para calcular el límite es necesario substituir el valor de "n" en la expresión, pero "n"$\to\infty$ y este no es un valor que podamos usar en la expresión de la suma, pero si observamos que debido a que la razón r = 0.9 es menor que la unidad, el término $r^n = 0.9^n$ tiende a cero a medida que se incrementa el valor de "n", por lo tanto, es

posible considerar que cuando $n\to\infty$, $0.9^n \to 0$ y la expresión de la suma se reduce a lo siguiente:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{12000}{1-0.9} = 120000$$

Esta es la cantidad límite que el hombre tendría que pagar sin importar el número de años transcurridos, por lo tanto es el límite buscado.

Si analizamos el problema gráficamente veríamos lo siguiente:

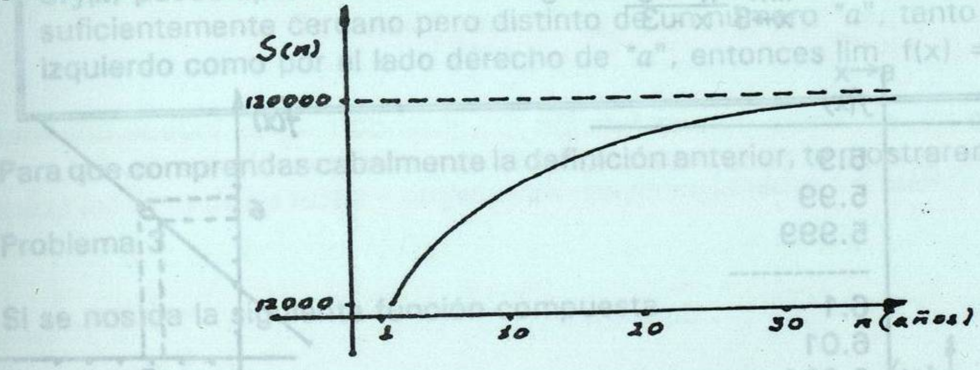


Fig. 2.1

El valor de la suma se aproxima a 120000, pero jamás alcanzará dicho valor.

Una demostración intuitiva de este límite, sería calcular S(n) para un número creciente de años y observar que, el $|S(n)-120000| \to 0$, cuando $n\to\infty$.

En el problema anterior la variable independiente tomó valores discretos y tendía a infinito, pero podemos observar que la existencia del límite de una función *f(x)*, no depende de si *f(x)* está realmente definida.

En seguida te mostraremos un ejemplo donde los valores de la variable independiente son continuos y tiende a un valor finito.

Problema 2

Supongamos que un problema del mundo real se puede representar por el siguiente modelo matemático

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

y deseamos saber, ¿cuál es el límite de *f(x)*, cuando $x\to 3$, es decir: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

El primer paso para calcular el límite de una función, consiste en sustituir el valor al que tiende la variable independiente en la expresión dentro del límite, si se obtiene un valor real "L", restaría demostrar que dicho valor es el límite buscado, o que el procedimiento empleado para calcular "L", es el establecido en alguno o algunos de los teoremas de límites que veremos más adelante.

El dominio de la función que examinaremos en el presente problema, es el conjun de todos los números reales, excepto $x=3$, pues $f(3)$ no esta definido, ya que sustituimos $x=3$ en la expresión de $f(x)$, obtenemos 0/0 , y ésto es un indeterminación, sin embargo, $f(x)$ puede calcularse para cualquier valor de "x" cercan a 3.

Los valores de la tabla y la gráfica de la fig. 2.2, muestran que cuando "x" se acerc a 3 por la izquierda o por la derecha, los valores de $f(x)$ se acercan a 6, entonces, es el límite de $f(x)$, cuando $x\to3$.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

x	$f(x)$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
------------	------------
3.1	6.1
3.01	6.01
3.001	6.001

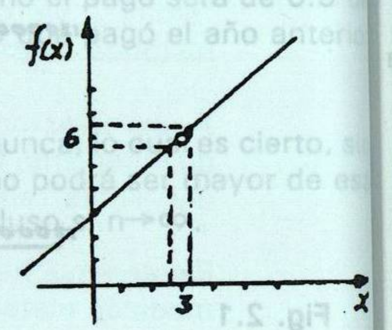


Fig. 2.2

Hemos encontrado en una forma intuitiva el límite buscado, así que en adelante usaremos la notación $x\to a^-$ para señalar que x tiende a "a" por la izquierda, y $x\to a^+$ lo hace por la derecha.

Si los límites unilaterales tienen un mismo valor "L", es decir si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

se dice entonces que el límite existe y se escribe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

En algunos casos como en el problema anterior, es posible remover la indeterminació y calcular el límite por sustitución directa, ya que con la condición de que $x\neq3$ podemos hacer lo siguiente:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)\,(x-3)}{(x-3)}=x+3$$

entonces

$$\lim_{x\to3} x+3 = 6$$

que es el mismo valor obtenido para $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$, cuando $x\to3$.

Las gráficas de las funciones

$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ y $f(x)=x+3$

son escencialmente iguales, excepto que la gráfica de la primera tiene un hueco en (3,6) es decir, es discontinua en ese punto.

Después de analizar estos problemas, estamos listos para dar una definición intuitiva de límite de una función

definición intuitiva de límite

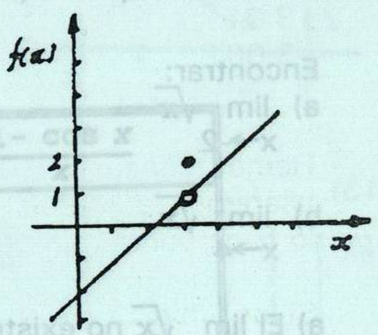
> Si $f(x)$ puede aproximarse a un número finito L, tomando a "x" suficientemente cercano pero distinto de un número "a", tanto por el lado izquierdo como por el lado derecho de "a", entonces $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Para que comprendas cabalmente la definición anterior, te mostraremos más ejemplos.

Problema 3

Si se nos da la siguiente función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$



Encontrar $\lim_{x\to3} f(x)$

Solución.
En este caso $f(x)=2$, cuando $x=3$, pero la definición nos dice que el límite es el valor al que se aproxima $f(x)$, cuando $x\to3$, tanto por la derecha, como por la izquierda, y de la gráfica se observa que $f(x)\to1$, cuando $x\to3$, por lo tanto

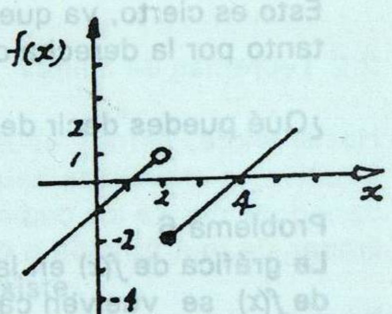
$$\lim_{x\to3} f(x) = 1$$

Problema 4

Se nos da la siguiente función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encontrar $\lim_{x\to2} f(x)$



1020124183

Fig. 2.4

En la gráfica (fig. 2.4) observamos que si $x \to 2$ por la izquierda, $f(x) \to 1$, y si lo hace por la derecha $f(x) \to -2$.

Esto contradice la definición de límite, que dice que debemos tener el mismo valor por ambos lados, entonces el límite de $f(x)$ no existe, cuando $x \to 2$.

$\lim_{x \to 2} f(x)$ ___ no existe

Sin embargo, podemos describir la conducta de $f(x)$ en las cercanías de 2, en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -2$$

La existencia o no, del límite de una función $f(x)$, cuando $x \to a$, es independiente de la existencia o no, del límite de la misma función $f(x)$, cuando $x \to b$, donde, $b \neq a$.

Problema 5

Si tenemos que $f(x) = \sqrt{x}$, donde $x \geq 0$.

Encontrar:

a) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$

b) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

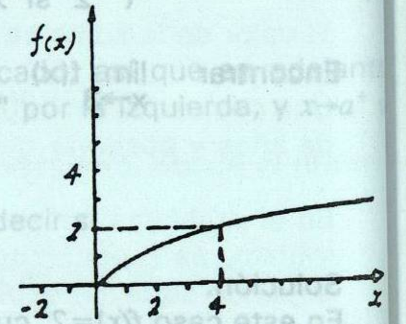


Fig. 2.5

a) El $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$ no existe, ya que el valor *al cual tiende "x"*, no está definido por la función dada.

b) El $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

Esto es cierto, ya que de la gráfica de la fig. 2.5 podemos observar que cuando $x \to 4$ tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x) \to 2$.

¿Qué puedes decir de $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$?

Problema 6

La gráfica de $f(x)$ en la fig. 2.6 muestra que cuando $x \to 3$ por la izquierda, los valores de $f(x)$ se vuelven cada vez más grandes, es decir, crecen sin cota, por lo tanto $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ no existe.

Esto es suficiente para decir que $\lim_{x \to 3} f(x)$ *no existe.*

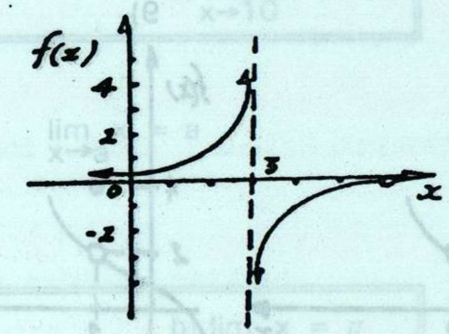


Fig. 2.6

Ejercicio 2.1

Completa los datos de las tablas y conjetura en una forma intuitiva los valores de los siguientes límites.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} =$

x (Radianes)	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
0.1	
0.01	
0.001	

x (Radianes)	$\frac{1 - \cos x}{x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

Evalúa el límite dado

3) $\lim_{x \to 2} (3x + 1)$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

5) $\lim_{x \to 1} (x^2 \ 1)$

6) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1}$

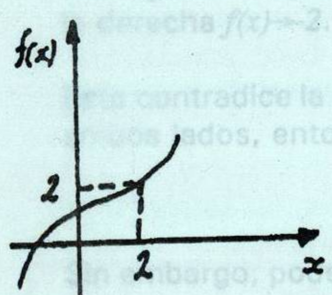
Utiliza la gráfica dada para encontrar cada límite, si es que existe.

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

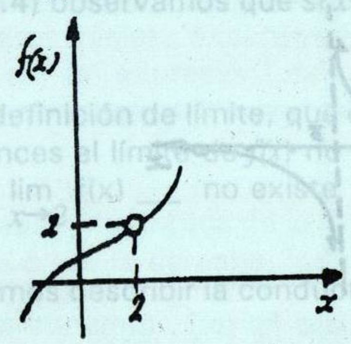
b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

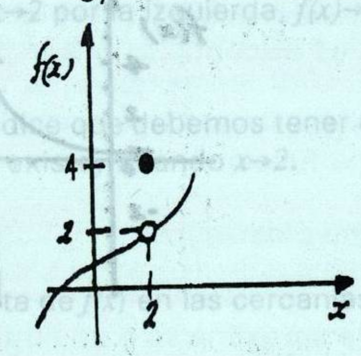
7)



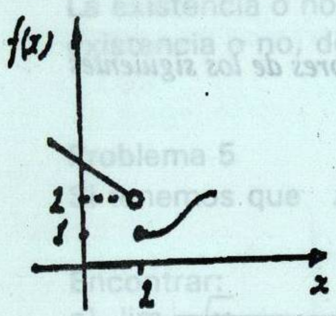
8)



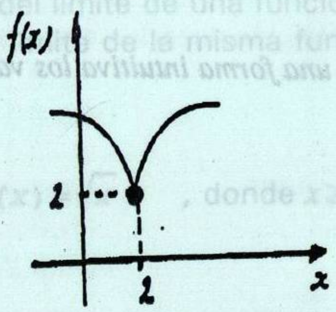
9)



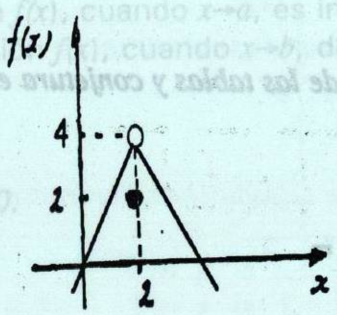
10)



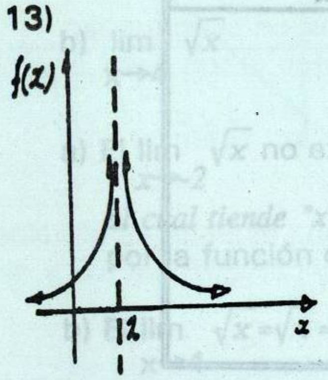
11)



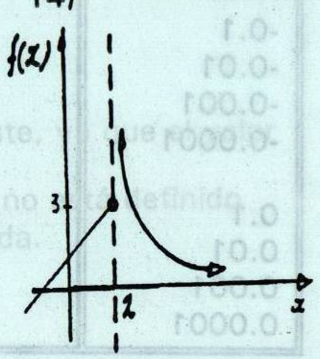
12)



13)



14)



2.2 Teoremas de límites

Hasta ahora, hemos abordado el concepto de límite de una función en una forma intuitiva, a través de tablas de valores y gráficas. Los teoremas que veremos a continuación, de los cuales omitiremos su demostración, te servirán para calcular los límites de una función o determinar su existencia en una forma sencilla y práctica.

Teorema 1
Si "c" es una constante, entonces

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Ejemplo 1

a) $\lim_{x\to 1} 5 = 5$ b) $\lim_{x\to 10} \pi = \pi$

Teorema 2

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Ejemplo 2

a) $\lim_{x\to 2} x = 2$ b) $\lim_{x\to \pi} x = \pi$

Teorema 3
Si "c" es una constante, entonces

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejemplo 3

a) $\lim_{x\to 2} 3x = 3 \lim_{x\to 2} x = 3\cdot 2 = 6$

Teorema 4
Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único

Teorema 5
Límite de una suma, de un producto y de un cociente.
si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces

i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

ii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, donde $L_2 \neq 0$

Teorema 6

Límite de una potencia
$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$