Teorema 7

Límite de una raíz
$\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = L^{1/n}$.

Si "n" es un número positivo par, $f(x) \geq 0$

Ejemplo 4
Evaluar $\lim_{x\to1}(3x + 5)$
Solución
Por los teoremas 1,2,3 se sabe que $\lim_{x\to1}3x$ y $\lim_{x\to1}5$ existen, por lo tanto por el teore
5(*i*)

Teorema 5 (*i*)
$$\lim_{x\to1}(3x+5) = \lim_{x\to1}3x + \lim_{x\to1}5 = 3\lim_{x\to1}x + \lim_{x\to1}5 =$$
$$= 3\cdot1+5=8$$

Ejemplo 5
Evaluar
a) $\lim_{x\to4}(x+1)\sqrt{x}$, b) $\lim_{x\to-2}(x+1)\sqrt{x}$

Solución
a) $\lim_{x\to4}(x+1)=5$ y $\lim_{x\to4}\sqrt{x} = 2$, por lo tanto,

por 5(ii), $\lim_{x\to4}(x+1)\sqrt{x} = \lim_{x\to4}(x+1)\cdot\lim_{x\to4}\sqrt{x} = 5\cdot2 = 10$

b) $\lim_{x\to-2}(x+1)=-1$ y $\lim_{x\to-2}\sqrt{x}$, no existe entonces

$\lim_{x\to-2}(x+1)\sqrt{x}$ no existe

Ejemplo 6
Evaluar $\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{4x+4}$, por los teoremas 1,2,3

$\lim_{x\to1}(3x-2) = 1$ y $\lim_{x\to1}(4x+4) = 8$, entonces por 5(iii)

$$\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{4x+4} = \frac{\lim_{x\to1}(3x-2)}{\lim_{x\to1}(4x+4)} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 7
Evaluar
$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}$ **, por los teoremas 1,2,3**

$\lim_{x\to1}x=1$ **y** $\lim_{x\to1}(x-1) = 0$**, entonces por 5(iii)**

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1} = \frac{\lim_{x\to1}x}{\lim_{x\to1}(x-1)} = \frac{1}{0}$$ **, no existe**

Ejercicio 2.2

Evaluar el límite dado

1. $\lim_{x\to2}10$
2. $\lim_{x\to0}\operatorname{sen}\pi$
3. $\lim_{x\to1}(-5x)$
4. $\lim_{x\to2}(x^4-3x^2+1)$
5. $\lim_{s\to2}(4s-2)(s+2)$
6. $\lim_{t\to0}\frac{t^2-10}{t+3}$
7. $\lim_{x\to4}\sqrt{3x+4}$
8. $\lim_{t\to0}\left(t-\frac{2}{t-2}\right)$
9. $\lim_{x\to-3}(x+3)^2$
10. $\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+7}$

En los siguientes ejercicios es necesario transformar la expresión dentro del límite para poder evaluarla

11. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$
12. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
13. $\lim_{h\to0}\frac{(s+h)^2-s^2}{h}$
14. $\lim \frac{x^2-4}{}$
17. $\lim_{x\to2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}$
18. $\lim_{x\to-3}\frac{4x-12}{x^2+x-6}$
19. $\lim_{x\to3}\frac{(x-3)^2}{x^2-x-6}$
20. $\lim \frac{x^2-9}{}$

$x \to -2 \quad x^2+2x$ $\qquad$ $x \to -3 \quad x^2+2x-3$

15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3}$ $\qquad$ 21. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+3x-1}{x} + \dfrac{1}{x}\right]$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-x^2}{x^3-x^2}$ $\qquad$ 22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

2.3 Límites en los que Interviene Infinito

Distinguiremos dos casos:

1. La función $f(x)\to\infty$, cuando $x\to a$

2. La función $f(x)\to L$, cuando $x\to\infty$

En el primer caso los valores de la función crecen o decrecen sin cota, cuando x tiende a un valor "a", por lo tanto, el límite de $f(x)$ no existe y se escribe en la siguiente forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Veamos un ejemplo

Evaluar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$

Si sustituimos el valor al que tiende "x" en la expresión dentro del límite, obtenemos 1/0, ¿Qué significa esto?

Para contestar esta pregunta, vamos a analizar el comportamiento de la función en las cercanías de $x=1$, tanto por la derecha, como por la izquierda, es decir, evaluaremos los límites unilaterales intuitivamente y construiremos la gráfica de la función dada.

x	$(x-1)$	$\dfrac{1}{x-1}$
0.9	-0.1	-10
0.99	-0.01	-100
0.999	-0.001	-1000
0.9999	-0.0001	-10000
1.1	0.1	10
1.01	0.01	100
1.001	0.001	1000
1.0001	0.0001	10000

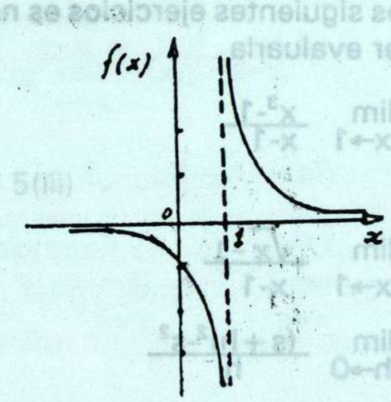


Fig. 2.7

A partir de los valores de la tabla y de la gráfica de la fig. 2.7, observamos que cuando nos aproximamos a $x=1$, por la izquierda, los valores de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ decrecen sin cota, y cuando lo hacemos por la derecha crecen sin cota.

Usando la notación de límite tenemos que,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Esto significa que no existe un valor límite para la función dada, cuando $x\to 1$, ni por la derecha, ni por la izquierda, entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \text{ no existe}$$

¿Qué podemos concluir del análisis anterior?

a) Si al sustituir el valor al que tiende "x" en la expresión de $f(x)$ dentro del límite se obtiene $\dfrac{\text{valor real}}{\text{cero}}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ lo que significa que no existe el límite de $f(x)$ cuando $x\to a$.

b) La gráfica nos muestra que la función tiene una asíntota vertical en $x=a$

NOTA: Las funciones pueden tener más de una asíntota vertical.

Lo anterior es muy útil cuando se necesita bosquejar la gráfica de una función, que tiene asíntotas verticales, te mostraremos un ejemplo.

Bosquejar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, en las proximidades de $x=1$.

Lo primero es ver si la función tiene un límite cuando $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(el límite no existe)}$$

Esto nos indica que $f(x)$ no está definida en $x=1$, y que la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x=1$, fig. 2.8.

Para bosquejar la gráfica es necesario conocer como se comportan los valores de $f(x)$, por la izquierda y por la derecha de $x=1$, para saber si $f(x)\to\infty$ ó $f(x)\to-\infty$, para ello evaluaremos

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1}$ $\quad$ y $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$

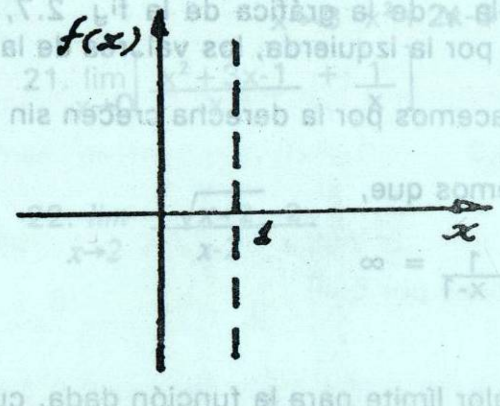


Fig. 2.8

Al evaluar estos límites nos interesa determinar el signo de los valores de $f(x)$, cuando nos acercamos a $x=1$, por la izquierda y por la derecha y definir si la función crece o decrece sin cota.

Esto se puede hacer fácilmente, tomando un valor muy cerca de $x=1$, primero por la izquierda, digamos $x=0.9$, y determinar el signo del numerador y del denominador de la expresión de la función, y en consecuencia el signo de los valores de $f(x)$, por la izquierda de $x=1$.

Si $x=0.9$, el signo de $f(x)=\frac{+}{-}=-$ (negativo)

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

Por el lado derecho de $x=1$, podemos elegir $x=1.1$, entonces,

Si $x=1.1$, el signo de $f(x)=\frac{+}{+}=+$ (positivo)

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$$

El bosquejo de la gráfica, en las cercanías de $x=1$, luce como se muestra en la fig. 2.9

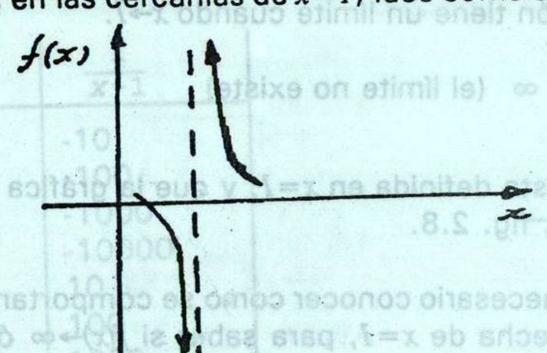
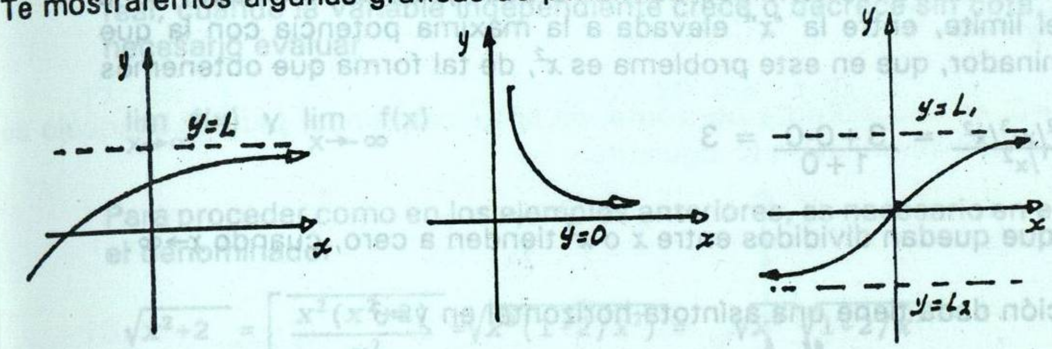


Fig. 2.9

El segundo caso, es cuando la variable independiente crece o decrece sin cota y la función $f(x)$, podría aproximarse a un valor constante L.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

Te mostraremos algunas gráficas de posibles funciones para aclarar lo anterior



a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L_2$

Fig. 2.10

Si $f(x)=L$, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, la recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.

En la gráfica de la función de la fig. 2.10c, $f(x)$ tiene dos asíntotas horizontales.

Si examinamos la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y su gráfica en la fig. 2.7, vemos que si $x\to\infty$,

la expresión de $f(x)=\frac{1}{\infty}$, y de la gráfica observamos que en este caso $f(x)=\frac{1}{x-1}\to 0$

es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

por lo tanto, $y=0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función dada.

Cuando $x\to-\infty$, puede realizarse un análisis semejante y veremos que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Podemos resumir en la siguiente tabla, los resultados para las formas de los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

Forma del límite	$\frac{L}{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{L}$	$\frac{L}{0}$
El límite es	0	infinito	infinito

En esta tabla no se contempla el caso ∞/∞, te mostraremos unos ejemplos para explicarte como se resuelve este caso.

Ejemplo 8

Evaluar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-3}{x^2+1}$$

En este caso se dividen todos los términos del numerador y del denominador de la expresión dentro del límite, entre la "x" elevada a la máxima potencia con la que aparece en el denominador, que en este problema es x^2, de tal forma que obtenemos lo siguiente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+2/x-3/x^2}{1+1/x^2} = \frac{3+0-0}{1+0} = 3$$

Todos los términos que quedan divididos entre x o x^2 tienden a cero, cuando $x\to\infty$.

La gráfica de la función dada tiene una asíntota horizontal en $y=3$

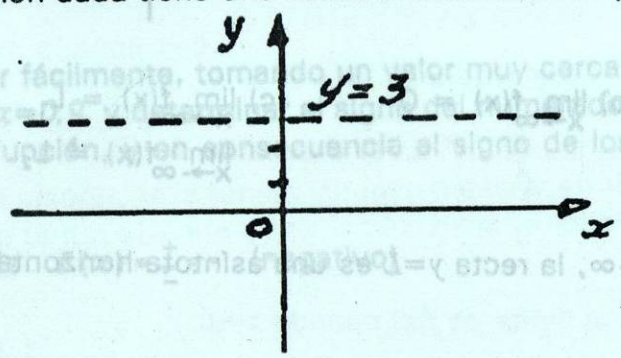


Fig. 2.11

Ejemplo 9

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2}$

dividimos el numerador y el denominador entre x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x^2-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

La recta $y=-1$ es una asíntota horizontal

¿Qué puedes decir de las asíntotas verticales?

Ejemplo 10

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{2-x^3}{3x+1}$

dividimos el numerador y denominador entre "x"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2/x-x^2}{3+1/x} = \frac{-\infty}{3} = -\infty$$

Ejemplo 11

Si se da, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

Determina si tiene asíntotas horizontales

Para realizar lo anterior es necesario investigar si la función se aproxima a un valor real, cuando la variable independiente crece o decrece sin cota, en otras palabras es necesario evaluar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Para proceder como en los ejemplos anteriores, es necesario en este caso transformar el denominador

$$\sqrt{x^2+2} = \sqrt{\frac{x^2(x^2+2)}{x^2}} = \sqrt{x^2(1+2/x^2)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+2/x^2}$$

Pero $\sqrt{x^2} = x$, si $x \geq 0$ y $\sqrt{x^2} = -x$ si $x<0$, por lo tanto;

a) $\sqrt{x^2} = x$, si $x \geq 0$, el denominador queda expresado como $\sqrt{x^2+2} = x\sqrt{1+2/x^2}$ y en consecuencia si $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

dividimos numerador y denominador entre x y obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{1} = 3$$

La recta $y=3$, es una asíntota de la función dada, cuando $x\to\infty$

b) $\sqrt{x^2} = -x$ si $x<0$, el denominador queda expresado como $\sqrt{x^2+2} = -x\sqrt{1+2/x^2}$, entonces si $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

dividimos numerador y denominador entre $-x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{-3}{1} = -3$$

La recta $y=-3$, es una asíntota horizontal de la función dada, cuando $x\to\infty$.

Para finalizar, te mostraremos algo nuevo sobre asíntotas. Hasta ahora, se te ha d que una asíntota, en pocas palabras, es una línea que la gráfica de la funció acerca a ella pero no la cruza, sin embargo hay excepciones.

La función $f(x)=\dfrac{sen\,x}{x}$, tiene una asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sen\ x}{x}=0$$

La recta $y=0$, es una asíntota horizontal de la función dada, pero el bosquejo d gráfica de la función muestra lo siguiente:

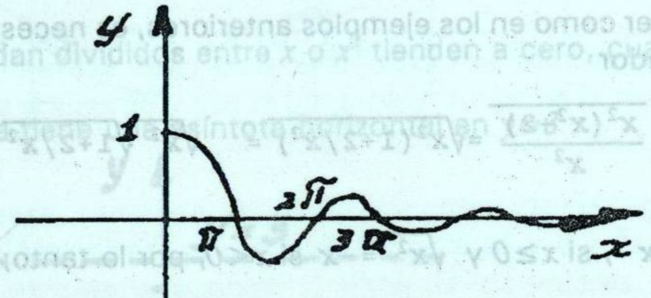


Fig. 2.12

¿Qué puedes decir de esto?

Ejercicio 2.3

Explica gráficamente el significado de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 10$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$
4. $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \infty$
6. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Encuentra los siguientes límites

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}$ y $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{x-3}$
13. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{(x-2)^4}$ y $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{(x-2)^4}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+{}^{2}/x}{5-{}^{2}/x^3}$

Evalúa los siguientes límites

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-4}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{2x^2-2}$
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-6x}{3+2x}$
21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-2}{x^2-3x}$
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x}}$

Encuentra las asíntotas verticales y horizontales, si las hay, y bosqueja la gráfica de las siguientes funciones

23. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
24. $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$
25. $f(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$
26. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+3}$
27. $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{(x-3)}$
28. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$

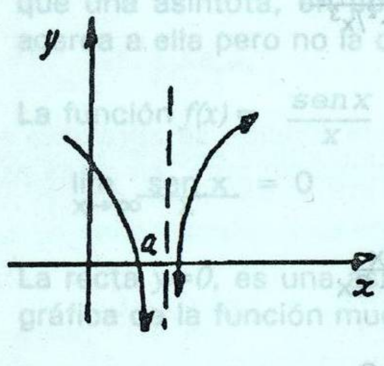
2.4 Continuidad

El concepto de continuidad de una función es fácil de comprender, y además, es indispensable en el estudio y aplicación del cálculo diferencial e integral.

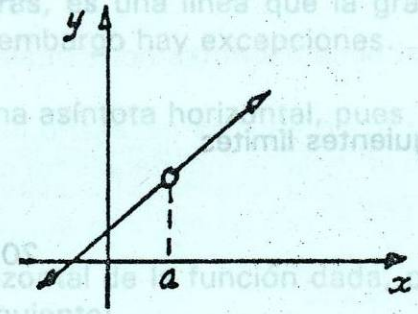
Una función continua se describe a menudo como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

En esta parte vamos a determinar las condiciones de continuidad de una función en un punto del dominio, por decir, en $x=a$, y además las condiciones de continuidad en un intervalo abierto o cerrado del dominio de la función, es decir, en (a,b),[a,b].

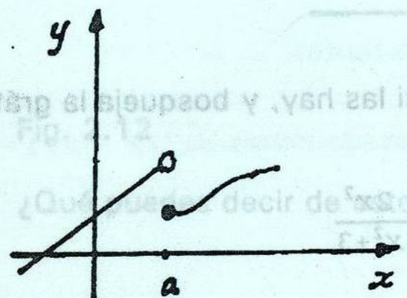
Antes de establecer la definición precisa de continuidad mostraremos algunas gráfi
de funciones que no son continuas o sea discontinuas en un punto del dominio d
función.



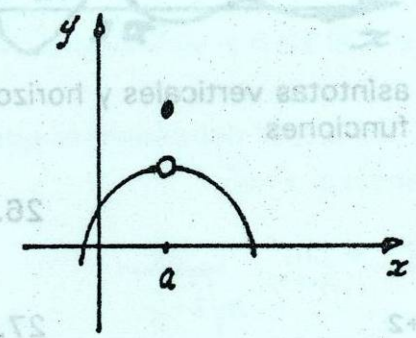
a) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe
y f(a) no esta definida



b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
f(a) no esta definida



c) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe
y f(a) esta definida



d) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
f(a) esta definida

Del análisis de las gráficas podemos establecer las siguientes condiciones que debe
cumplirse para que una función sea continua en un punto "a".

Definición

Se dice que una función $f(x)$, es continua en un punto del dominio, $x=a$, si
i) $f(a)$ esta definida
ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 12

La función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, es discontinua en $x=-1$, puesto que $f(-1)$ no esta definida.

Sin embargo $f(x)$ es continua para toda $x \neq -1$.

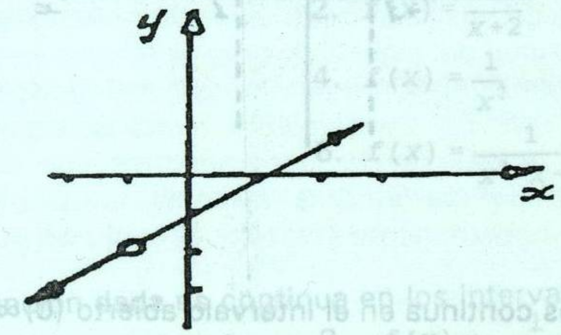


Fig. 2.14

Ejemplo 13

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x=0$, ya que $f(0)$ no esta definida y $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

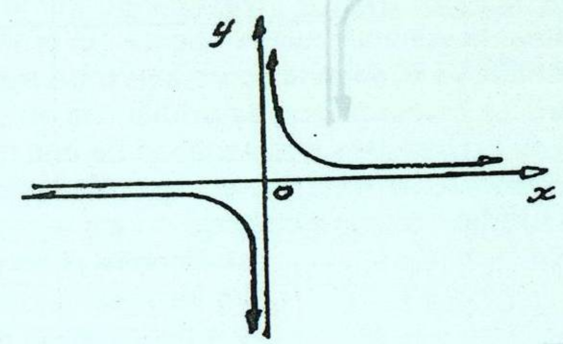


Fig. 2.15

Continuidad en un intervalo

a) Una función $f(x)$ es continua en un intervalo <u>abierto</u> (a,b) si lo es en todo número del intervalo, aunque $f(a)$ y $f(b)$ no estén definidos.

b) Una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a,b] si lo es en todo número del intervalo y además, que $f(a)$ y $f(b)$ estén definidos, es decir

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

Ejemplo 14

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es continua en el intervalo abierto (-1;1), pero es discontinua en el intervalo cerrado [-1;1] puesto que f(-1) y f(1) no están definidos.

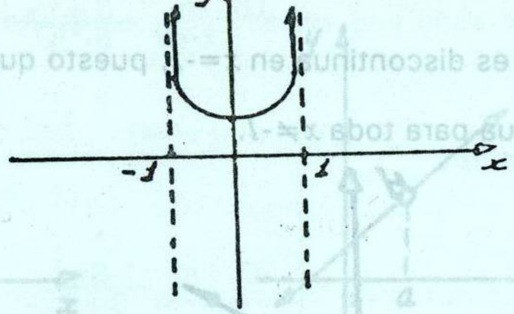


Fig. 2.16

Ejemplo 15

La función $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua en el intervalo abierto $(0;\infty)$, pero es discontinuo en el intervalo semiabierto $[0;\infty)$, pues f(0) no esta definida

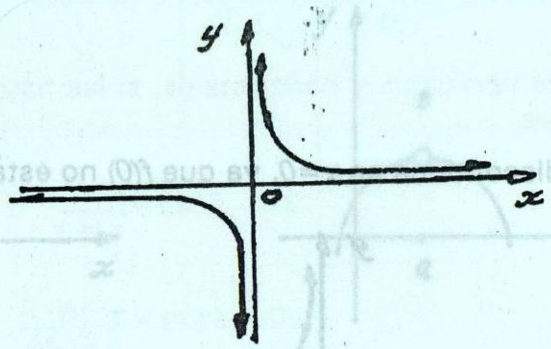


Fig. 2.17

Ejemplo 16

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, es continua en el intervalo cerrado [-1;1], ya que $\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = f(-1) = 0$, y $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = f(1) = 0$

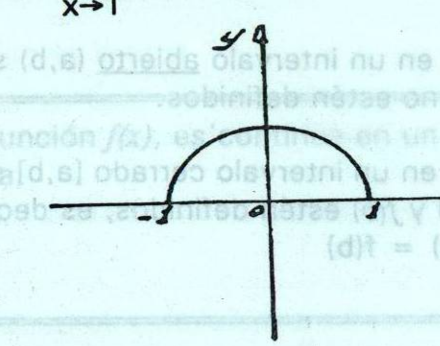


Fig. 2.18

Ejercicio 2.4

Determina si los hay, los valores de "x" para los cuales $f(x)$ es discontinua

1. $f(x)=x^3-1$
2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$

Determina si la función dada es continua en los intervalos indicados

7. $f(x)=x^2+2$

   a) $[-1;4]$, b) $(3;\infty)$
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

   a) $(1;\infty)$ b) $[1;\infty)$
9. $f(x) = \frac{1}{x}$

   a) $(-\infty;\infty)$, b) $(0;\infty)$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$

    a) $(-2;3)$, b) $[-2;3]$