CAPÍTULO 3
LA DERIVADA

El tiempo ha demostrado que el descubrimiento del cálculo, registrado en la última porción del siglo XVII gracias a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716), fue uno de los adelantos más importantes en el desarrollo del pensamiento humano. Hay una cita atribuida a Laplace en la que revela la perspectiva que él observó en el logro monumental de los autores de esta obra. De ella dijo:"Siempre permanecerá preeminente sobre todas las otras producciones del género humano".

Ordinariamente, el estudio del cálculo se divide en dos partes: el cálculo diferencial y el cálculo integral y la "derivada de una función" es fundamental para el estudio del cálculo diferencial, pues sus conceptos son indispensables para las investigaciones no elementales tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales y humanísticas. El propósito de este capítulo es definir, ilustrar y aplicar la idea de la derivada de una función.

Empezaremos nuestro trabajo investigando cómo varía el valor de una función, al variar la variable independiente. El problema fundamental del cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a sus descubridores a determinar los principios fundamentales del cálculo, el instrumento más poderoso de las matemáticas modernas.

3.1 Incrementos y Razones de Cambio

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original. Los ejemplos siguientes ilustran tales situaciones.

1. El cambio en el costo total de operación de una planta que resulta de cada unidad adicional producida.
2. El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad (por ejemplo, $1) en el precio.
3. El cambio en el producto nacional bruto de un país con cada año que pasa.

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro, es la "diferencia" que se obtiene restando el valor inicial del valor final.

Definición

> Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces el cambio en el valor de x, que es x_2-x_1, se denomina el incremento de x y se denota por Δx.

Usamos la letra griega Δ (delta) para denotar un cambio o incremento de cualquier variable.

Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo (decremento), según la variable aumente o disminuya al cambiar de valor. Así:
Δx denota el cambio de la variable x.
Δp indica el cambio de la variable p.
Δq denota el cambio de la variable q.

Sea $y=f(x)$ una variable que depende de x. Cuando x tiene el valor x_1; y tiene el valor $y_1=f(x_1)$. De manera similar, cuando $x=x_2$; y tiene el valor $y_2=f(x_2)$. Así, el incremento de y es

$$\Delta y = y_2-y_1$$
$$\text{o sea, } \Delta y=f(x_2)-f(x_1)$$

Si en $y=f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará el incremento correspondiente de la variable dependiente y, o sea, de la función $f(x)$.

El incremento Δy siempre ha de contarse a partir del valor inicial definido de y, que corresponde al valor inicial fijado arbitrariamente de x desde el cual se cuenta el incremento Δx. Por ejemplo, consideremos la función

$$y=x^2$$

Si tomamos $x=10$ como valor inicial de x, esto fija a $y=100$ como valor inicial de y.

Supongamos que x aumenta hasta $x=12$, es decir, $\Delta x=2$; entonces y aumenta hasta $y=144$, es decir, $\Delta y=44$.

Si ahora, x decrece hasta $x=9$, es decir, $\Delta x=-1$; entonces y decrece hasta $y=81$, es decir, $\Delta y=-19$.

En esta discusión y aumenta cuando x aumenta y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; entonces Δx y Δy tendrán signos contrarios.

Ejemplo 1
El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por

$$q = 500(150\text{-}p)$$

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120¢ a 130¢ por litro.

Solución
Aquí, p es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de p es $p_1 = 120$ y el segundo valor es $p_2 = 130$. El incremento de p es

$$\Delta p = p_2\text{-}p_1 = 130\text{-}120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500(150\text{-}p_1) = 500(150\text{-}120) = 15{,}000$$
$$q_2 = 500(150\text{-}p_2) = 500(150\text{-}130) = 10{,}000$$

En consecuencia, el incremento de q está dado por:

$$\Delta q = q_2\text{-}q_1 = 10{,}000\text{-}15{,}000 = \text{-}5{,}000$$

El incremento de p mide el crecimiento de q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5,000 litros por día si el precio se incrementa de 120¢ a 130¢.

Resolviendo la ecuación $\Delta x=x_2\text{-}x_1$ para x_2, tenemos $x_2=x_1+\Delta x$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos: $\Delta y=f(x_2)\text{-}f(x_1)$

$$\Delta y=f(x_1+\Delta x)\text{-}f(x_1)$$

Dado que x_1 puede ser cualquier valor de x, podemos suprimir el subíndice y escribir

$$\boxed{\Delta y=f(x+\Delta x)\text{-}f(x)}$$

En forma alternativa, dado que $f(x)=y$, podemos escribir

$$\boxed{y+\Delta y=f(x+\Delta x)}$$

Sea P el punto (x_1,y_1) y Q el punto (x_2,y_2), ambos situados en la gráfica de la función $y=f(x)$. (Véase la fig. 1) Entonces el incremento Δx es igual a la distancia horizontal de P a Q, mientras que Δy es igual a la distancia vertical de P a Q. En otras palabras, Δx es el avance y Δy es la elevación de P a Q.

En el caso ilustrado en la parte (a) de la figura 1, tanto Δx como Δy son positivos. Es posible que Δy o ambos sean negativos y aún Δy puede ser cero. Un ejemplo típico de un caso en que $\Delta x > 0$ y $\Delta y < 0$ se ilustra en la parte (b) de la figura 1.

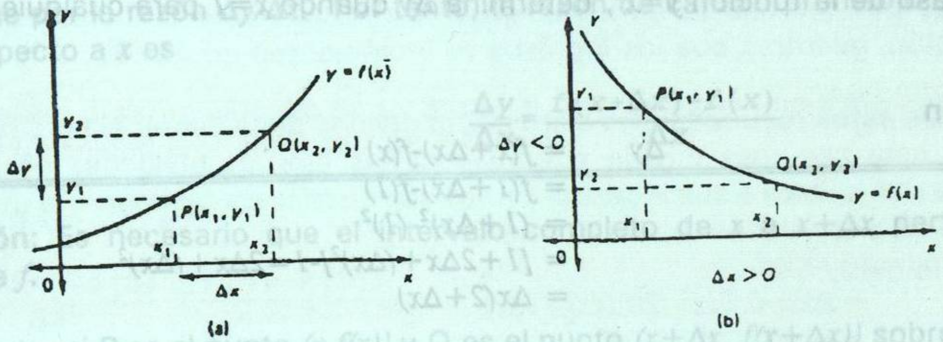

Fig. 1

En algunas de las aplicaciones que abordaremos más tarde, nos convendrá pensar el incremento Δx como muy pequeño (esto es, sólo desearemos considerar que Δx significa un cambio pequeño de x más bien que sólo un incremento). Sin embargo, en esta sección no se pondrá alguna restricción en el tamaño de los incrementos considerados; pueden ser pequeños así como relativamente grandes.

Ejemplo 2
Dada $f(x)=x^2$, calcula Δy si $x=1$ y $\Delta x=0.2$

Solución
Sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de Δy, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)\text{-}f(x)\\ &= f(1+0.2)\text{-}f(1)\\ &= f(1.2)\text{-}f(1)\\ &= (1.2)^2\text{-}(1)^2\\ &= 1.44\text{-}1=0.44\end{aligned}$$

Así que, un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en y de 0.44. Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 2.

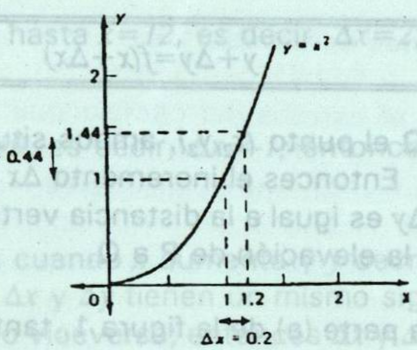

Fig. 2

Ejemplo 3
En el caso de la función $y=x^2$, determina Δy cuando $x=1$ para cualquier incremento Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= f(1+\Delta x)-f(1)\\ &= (1+\Delta x)^2-(1)^2\\ &= [1+2\Delta x+(\Delta x)^2]-1=2\Delta x+(\Delta x)^2\\ &= \Delta x(2+\Delta x)\end{aligned}$$

Puesto que la expresión de Δy del ejemplo 3 es válida para todos los incrementos Δx, podemos resolver el ejemplo 2 sustituyendo $\Delta x=0.2$ en el resultado. Obtenemos:
$\Delta y=0.2(2+0.2)=0.2(2.2)=0.44$
como antes.

Ejemplo 4
De nuevo considera la función $y=x^2$ y determina Δy para valores generales de x y Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= (x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2\\ &= \Delta x(2x+\Delta x)\end{aligned}$$

Otra vez es claro que podemos recobrar el resultado del ejemplo 3 sustituyendo $x=1$ en la expresión del ejemplo 4. Sin embargo, esta expresión da el incremento de y para cualesquiera valores de x y Δx.

Cuando se establecen en términos absolutos (como en los ejemplos anteriores), los cambios de la variable dependiente contienen menos información de la que tendrían si se establecieran en términos relativos. Por ejemplo, enunciados absolutos como, "la temperatura descendió 10°C" o "las ganancias se incrementarán en $3000" son menos informativos que proposiciones relativas como, "la temperatura descendió 10°C en las últimas 5 horas" o "las ganancias se incrementarán en $3000 dólares si se

venden 60 unidades extras". De estos últimos enunciados, no sólo sabemos qué tanto cambia la variable (temperatura o ganancias), sino también podemos calcular la razón promedio en que está cambiando con respecto a una segunda variable. Por tanto, el descenso promedio de la temperatura durante las últimas 5 horas es $10/5=2$°C por hora; y el incremento promedio de las ganancias si 60 unidades más se venden es de $3000/60=50$ dólares por unidad.

Definición

La razón de cambio promedio de una función f sobre un intervalo de x a $x+\Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la razón de cambio promedio de y con respecto a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Observación: Es necesario que el intervalo completo de x a $x+\Delta x$ pertenezca al dominio de f.

Gráficamente, si P es el punto $(x,f(x))$ y Q es el punto $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ sobre la gráfica de $y=f(x)$, entonces $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ es la elevación y Δx es el avance de P a Q. Por la definición de pendiente, podemos decir que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que, la razón de cambio promedio de y con respecto a x es igual a la pendiente de la secante PQ que une los puntos P y Q sobre la gráfica de $y=f(x)$. (Véase la fig. 3) Estos puntos corresponden a los valores x y $x+\Delta x$ de la variable independiente.

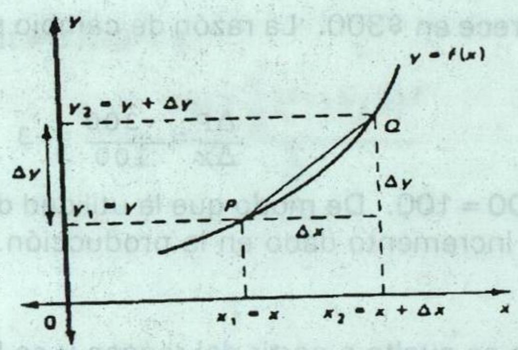

Fig. 3

Ejemplo 5
(Costo, ingresos y utilidades)
Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x)=20{,}000+40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x)=100x-0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana, pero está considerado incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcula los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determina la razón de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extras producidas.

Solución

El primer valor de x es 3100 y $x+\Delta x=3200$

$$
\begin{aligned}
\Delta C &= C(x+\Delta x)-C(x)\\
&= C(3200)-C(3100)\\
&= [20{,}000+40(3200)]-[20{,}000+40(3100)]\\
&= 148{,}000-144{,}000=4000\\
\Delta R &= R(x+\Delta x)-R(x)\\
&= R(3200)-R(3100)\\
&= [100(3200)-0.01(3200)^2]-[100(3100)-0.01(3100)^2]\\
&= 217{,}600-213{,}900=3700
\end{aligned}
$$

De modo que los costos se incrementan en \$4000 bajo el incremento dado en la producción, mientras que los ingresos se incrementan en \$3700.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en \$300. Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$
\begin{aligned}
P(x) &= R(x)-C(x)\\
&= 100x-0.01x^2-(20{,}000+40x)\\
&= 60x-0.01x^2-20{,}000
\end{aligned}
$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$\Delta P=P(3200)-P(3100)$

$=[60(3200)-0.01(3200)^2-20{,}000]-[60(3100)-0.01(3100)^2-20{,}000]$

$=69{,}600-69{,}900=-300$

Así pues, la utilidad decrece en \$300. La razón de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x}=\frac{-300}{100}=-3$$

en donde $\Delta x=3200-3100=100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de \$3 por tonelada bajo el incremento dado en la producción.

Ejemplo 6

Cuando cualquier objeto se suelta a partir del reposo y se le permite caer libremente bajo la fuerza de gravedad, la distancia s (en pies) recorrida en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$s(t)=16t^2$$

Determina la velocidad promedio del objeto durante los intervalos de tiempos siguientes

a) El intervalo de tiempo de 3 a 5 segundos
b) El cuarto segundo (de t = 3 a t = 4 segundos)
c) El intervalo de tiempo entre los instantes 3 y 3½ segundos.
d) El lapso de t a t + Δt

Solución

La velocidad promedio de cualquier móvil es igual a la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo empleado. Durante el lapso de t a t + Δt, la distancia recorrida es el incremento Δs, y así la velocidad promedio es la razón Δs/Δt.

a) Aquí t = 3 y t + Δt = 5

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{s(5)-s(3)}{5-3}$$

$$=\frac{16(5^2)-16(3^2)}{2}=\frac{400-144}{2}$$

$$=\frac{256}{2}=128$$

Por consiguiente, durante el lapso de t = 3 a t = 5, el móvil cae una distancia de 256 pies con una velocidad promedio de 128 pies/seg.

b) Ahora, t = 3 y t + Δt = 4

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{s(4)-s(3)}{4-3}$$

$$=\frac{16(4^2)-16(3^2)}{1}=256-144$$

$$=112$$

El móvil tiene una velocidad promedio de 112 pies/segundo durante el cuarto segundo de caída.

c) En este caso, t = 3 y Δt = 3½-3 = ½

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{16(3\frac{1}{2})^2-16(3)^2}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{196-144}{\frac{1}{2}}=\frac{52}{\frac{1}{2}}$$

$$=104$$

Así pues, el móvil tiene una velocidad promedio de 104 pies/segundo durante el lapso de 3 a 3½ segundos.

d) En el caso general

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{16(t+\Delta t)^2-16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{16[t^2+2t\cdot \Delta t+(\Delta t)^2]-16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{32t\cdot \Delta t+16(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= 32t + 16\Delta t$$

la cual es la velocidad promedio durante el lapso de t a $t+\Delta t$.

Todos los resultados particulares del ejemplo 6 pueden obtenerse como casos especiales de la parte (d) poniendo los valores apropiados de t y Δt. Por ejemplo, el resultado de la parte (a) se obtiene haciendo $t=3$ t $\Delta t=2$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t+16\Delta t = 32(3)+16(2) = 96+32 = 128$$

Ejercicio 3.1

Determina los incrementos de las funciones siguientes para los intervalos dados.

1. $f(x)=2x+7;$ $x=3,\ \Delta x=0.2$
2. $f(x)=2x^2+3x-5;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
3. $g(x)=x^2-4;$ $x=1,\ \Delta x=2$
4. $f(t)=900/t;$ $t=25,\ \Delta t=5$
5. $h(x)=ax^2+bx+c;$ x a $x+\Delta x$
6. $F(x)=x+2/x;$ x a $x+\Delta x$

Calcula la razón de cambio promedio de cada función en el intervalo dado

7. $f(x)=3-7x;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
8. $f(x)=3x^2-5x+1;$ $x=3,\ \Delta x=0.2$
9. $g(x)= x^2-9;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
10. $h(x) =3x^2+1;$ $x=5,\ \Delta x=0.3$
11. $f(t)= \sqrt{4+t};$ $t=5,\ \Delta t=1.24$
12. $F(x)= 3/x$; x a $x + \Delta x$
13. $G(t)=t^3+t;$ $t=a$ a $a+h$
14. $f(x)=x^3-1;$ x a $x+\Delta x$
15. (Crecimiento y variación de la población)
   El tamaño de la población de cierto centro minero al tiempo t (medido en años) está dado por

   $$p(t) = 10{,}000+1000t-120t^2$$

   Determina la razón de crecimiento promedio entre cada par de tiempos.

   a. $t=3$ y $t=5$ años b. $t=3$ y $t=4$ años
   c. $t=3$ y $t=3\frac{1}{2}$ años d. t y $t + \Delta t$ años

16. (Función de costo)
   Un fabricante descubre que el costo de producir x artículos está dado por

   $$C=0.001x^3-0.3x^2+40x+1000$$

   Determina el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 50 a 60. Calcula el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 50 a 60 unidades.

17. (Función de costo)
   Con respecto a la función de costo del ejercicio 16, calcula el costo promedio por unidad adicional en incremento de la producción de 90 a 100 unidades.

18. (Crecimiento del PNB)
   Durante el período de 1970 a 1990, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula $I=5+0.1x+0.01x^2$ en miles de millones de dólares. (Aquí la variable x se usa para medir años, con $x=0$ correspondiente a 1970 y $x=20$ a 1990). Determina el crecimiento promedio del PNB por año entre 1975 y 1980.

19. (Proyectiles)
   Una partícula que se lanza hacia arriba con una velocidad de 200 pies/segundo alcanza una altura s después de t segundos, en donde $s=200t-16t^2$. Calcula la velocidad ascendente promedio en cada caso.

   a. Entre $t=2$ y $t=3$ segundos b. Entre $t=3$ y $t=5$ segundos
   c. Entre t y $t+\Delta t$

20. (Función de ingreso)
   El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por

   $$R=f(x)=500x-2x^2$$

   Determina la razón promedio de ingreso por unidad extra cuando el número de unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 100 a 120.

3.2 La Derivada

En el ejemplo 6 de la sección 3.1, estudiamos las velocidades promedio de un móvil que cae durante varios intervalos de tiempo diferentes. Sin embargo, en muchos ejemplos tanto de la ciencia como de la vida diaria, la velocidad promedio de un móvil no da la información de mayor importancia. Por ejemplo, si una persona que viaja en un automóvil choca contra una pared de concreto, no es la velocidad promedio sino la velocidad en el instante de colisión la que determina si la persona sobrevivirá al accidente.

¿Qué entendemos por la velocidad de un móvil en cierto instante (o velocidad instantánea, como por lo regular se le denomina)? La mayoría de la gente aceptaría que en una idea como la de velocidad instantánea, es precisamente la cantidad que