el velocímetro del automóvil mide, pero la definición de velocidad instantánea presenta algunas dificultades. La velocidad se define como la distancia recorrida en cierto intervalo dividida entre su duración. Pero si nos interesa la velocidad en cierto instante particular, deberíamos considerar un intervalo de duración cero. Sin embargo, la distancia recorrida durante tal intervalo sería cero, y obtendríamos 0/0, una cantidad que no tiene sentido.

A fin de definir la velocidad instantánea de un móvil en cierto instante t, procederemos de la manera siguiente. Durante cualquier intervalo con una duración entre t y $t+\Delta t$, se recorre un incremento en la distancia Δs. La velocidad promedio es $\Delta s/\Delta t$. Imaginemos ahora que el incremento Δt se hace más y más pequeño, de modo que el intervalo correspondiente es muy pequeño. Así, es razonable suponer que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ sobre tal intervalo muy pequeño estará muy cerca de la velocidad instantánea en el instante t. Más aún, entre más corto sea el intervalo Δt, mejor aproximará la velocidad promedio a la velocidad instantánea. De hecho, podemos imaginar que si a Δt se le permite hacerse arbitrariamente cercano a cero, de modo que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ puede hacerse cada vez más parecida a la velocidad instantánea.

En el ejemplo 6 de la sección 3.1 vimos que la velocidad promedio durante el intervalo de t a $t + \Delta t$, de una partícula que cae bajo la acción de la gravedad está dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

Haciendo $t=3$, obtenemos la velocidad promedio durante un intervalo de duración Δt después de 3 segundos de caída.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 96 + 16\Delta t$$

Algunos valores de esta velocidad aparecen en la tabla 1 para diferentes valores del incremento Δt. Por ejemplo, la velocidad promedio entre 3 y 3.1 segundos se obtiene haciendo $\Delta t=0.1$: $\Delta s/\Delta t = 96 + 1.6 = 97.6$ pies/segundo.

Tabla 1

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	104	100	97.6	96.16	96.016

A partir de los valores de la tabla 1 es claro que a medida que Δt se hace más y más pequeño, la velocidad promedio se acerca cada vez más a 96 pies/segundo. Es razonable concluir en consecuencia que 96 pies/segundo es la velocidad instantánea en $t=3$.

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad media sobre intervalos de tiempo cada vez más cortos, comenzando cada uno en $t=3$. Cuanto más corto sea el intervalo, mejor nos aproximamos a la "verdadera" velocidad en el instante $t=3$. El concepto de límite proporciona el modo de alcanzar la mejor descripción.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición en el momento está dada por s(t). En el instante próximo $t+\Delta t$, está en $s(t+\Delta t)$. Por lo tanto, la velocidad media durante este intervalo es

$$V_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

Y ahora definimos la "velocidad instantánea v" en el instante t mediante

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{prom} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}}$$

En el caso en que $s(t) = 16t^2$, la velocidad instantánea en el instante t

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} 32t + 16\Delta t$$

$$V = 32t$$

Entonces la velocidad instantánea cuando $t=3$ es $v = 32(3) = 96$ pies por segundo. Esto confirma nuestra suposición anterior.

Veamos cómo ésta definición de velocidad instantánea de un móvil nos conduce de manera natural a un proceso de límite. La velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ se calcula en primer término para un lapso de duración entre t y $t+\Delta t$, y luego se calcula su valor límite cuando $\Delta t \to 0$. Podríamos describir $\Delta s/\Delta t$ como la razón de cambio promedio de la posición, s, con respecto al tiempo, y su límite es la razón de cambio instantáneo de s con respecto a t.

Existen muchos ejemplos de procesos que se desarrollan en el tiempo y que pueden describirse por una o más funciones de t. En cada caso, puede darse una definición correspondiente a la razón de cambio de la cantidad apropiada con respecto al tiempo. El ejemplo 1 ilustra un caso típico del asunto.

Ejemplo 1
(Crecimiento de la población)
Durante el período de 10 años de 1980 a 1990, se encontró que la población de cierto país estaba dada por la fórmula

$$P(t) = 1 + 0.03t + 0.001t^2$$

en donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1980. Calcula la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1985.

Busquemos la razón de crecimiento en $t=5$. El incremento de P entre $t=5$ y $t=5+\Delta t$ es:

$$\begin{aligned}\Delta P &= p(5+\Delta t)-P(5)\\ &= [1+0.03(5+\Delta t)+0.001(5+\Delta t)^2]\\ &\quad -[1+0.03(5)+0.001(5)^2]\\ &= [1+0.15+0.03\Delta t+0.001(25+10\Delta t+(\Delta t)^2)]\\ &\quad -[1+0.15+0.001(25)]\\ &= 0.04\Delta t+0.001(\Delta t)^2 = \Delta t(0.04+0.001\Delta t)\end{aligned}$$

La tasa de crecimiento promedio durante este intervalo de tiempo está dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = 0.04+0.001\Delta t$$

A fin de obtener la tasa de crecimiento instantánea, debemos tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}[0.04+0.001\ \Delta t] = 0.04$$

Así, al inicio de 1985, la población del país está creciendo una tasa de 0.04 millones por año (esto es, 40,000 por año).

La razón de cambio instantánea de una función tal como la del ejemplo 1 es un caso de lo que llamaremos la "derivada" de una función. Daremos ahora una definición formal de la derivada.

Definición

> Sea $y=f(x)$ una función dada. La derivada de y con respecto a x, denotada por dy/dx, se define por
>
> $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
>
> o bien
>
> $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

con tal de que este límite exista.

A la derivada también se le da el nombre de "coeficiente diferencial" y la operación de calcular la derivada de una función se denomina "diferenciación".

Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que f es diferenciable en tal punto.

La derivada de $y=f(x)$ con respecto a x también se denota por uno de los símbolos siguientes:

$$\frac{d}{dx}(y),\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{d}{dx}(f),\qquad y',\ f'(x),\ D_x y,\ D_x f$$

Cada una de estas notaciones indica exactamente lo mismo que dy/dx.

Observación: dy/dx indica la derivada de y con respecto a x si y es una función de la variable independiente x; dC/dq denota la derivada de C con respecto a q si C es una función de la variable independiente q; dx/du indica la derivada de x con respecto a u si x es una función de la variable independiente u.

De la definición

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \frac{dC}{dq} = \lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta q},\ y\ \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}$$

Con el propósito de calcular la derivada dy/dx, procedemos de la manera siguiente:

1. Calculamos $y=f(x)$ y $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$
2. Restamos la primera cantidad de la segunda a fin de obtener Δy y simplificamos el resultado.
3. Dividimos Δy entre Δx y entonces tomamos el límite de la expresión resultante cuando $\Delta x\to 0$.

Ejemplo 2

Calcula la derivada de $2x^2+3x+1$ con respecto a x.

Solución

Sea $y=f(x)=2x^2+3x+1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}y+\Delta y &= f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+1\\ &= 2[x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]+3x+3\Delta x+1\\ &= 2x^2+4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+3x+3\Delta x+1\\ &= 2x^2+3x+1+\Delta x(4x+3+2\Delta x)\end{aligned}$$

Restando y a $y+\Delta y$, tenemos

$$\Delta y = \Delta x(4x+3+2\Delta x)$$

y así, $\Delta y/\Delta x=4x+3+2\Delta x$. En consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4x+3+2\Delta x) = 4x+3$$

Si $f(x)=2x^2+3x+1$, se sigue que $f'(x)=4x+3$. En particular, por ejemplo, $f'(-2)=4(-2)+3=-5$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Ya hemos visto que cuando la variable independiente de una función $y=f(x)$ representa el tiempo, la derivada dy/dt da la razón de cambio instantánea de y. Por ejemplo, si $s=f(t)$ representa la distancia recorrida por un móvil, ds/dt da la velocidad instantánea. Aparte de esta clase de aplicación de la derivada, sin embargo, tiene también una interpretación desde el punto de vista geométrico.

Si P y Q son los dos puntos $(x,f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ sobre la gráfica de $y=f(x)$, entonces, como se estableció en la sección 3.1, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente del segmento rectilíneo PQ. A medida que Δx se hace más y más pequeño, el punto Q se aproxima cada vez más a P el segmento secante PQ esta cada vez más cerca de ser tangente cuando $\Delta x\to 0$, la pendiente de la secante PQ se aproxima a la pendiente de la línea tangente en P. Así que

$$\lim_{\Delta x\to O}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

representa la pendiente de la línea tangente a $y=f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$. (véase la fig. 4).

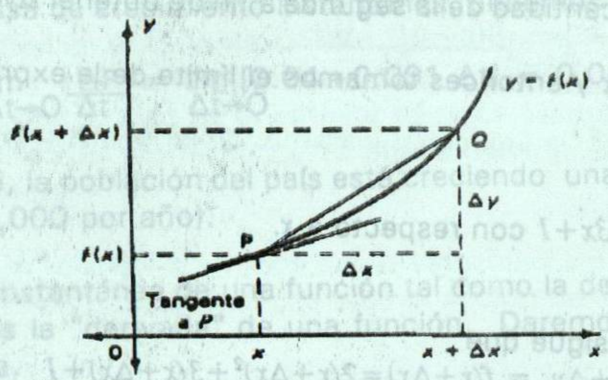

Fig. 4

Ejemplo 3
Calcula la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-4x$ en el punto (3,-3)

Solución
En primer término calculamos dy/dx. Tenemos que $y=x^2-4x$, de modo que
$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)$
luego, $\Delta y=[(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)]-y$

$$\begin{aligned}\Delta y &= [(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)]-(x^2-4x)\\ \Delta y &= 2x\Delta x+(\Delta x)^2-4\Delta x\\ \Delta y &= \Delta x(2x+\Delta x-4)\end{aligned}$$

Así que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x-4)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x-4$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to O}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to O}2x+\Delta x-4$$

$$\frac{dy}{dx}=2x-4$$

Aquí $f'(x)=2x-4$. Cuando $x=3$, $f'(3)=2(3)-4=2$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a $y=x^2-4x$ en $x=3$ es 2.

Con el objeto de obtener la ecuación de la recta tangente, podemos usar la fórmula punto-pendiente

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Con pendiente m = 2 y $(x_1,y_1)=(3,-3)$, obtenemos

$$\begin{aligned}y-(-3)&=2(x-3)\\ y+3&=2(x-3)\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}y+3&=2x-6\\ y&=2x-6-3\\ y&=2x-9\end{aligned}$$

que es la ecuación requerida

Ejemplo 4
Evalúa dy/dx para la ecuación cúbica

$$y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

en donde A,B,C y D son cuatro constantes

Solución
Reemplazando x por $x+\Delta x$, encontramos que

$$\begin{aligned}y+\Delta y&=A(x+\Delta x)^3+B(x+\Delta x)^2+C(x+\Delta x)+D\\ &=A[x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]\\ &\quad+B[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]+C(x+\Delta x)+D\end{aligned}$$

Si ahora restamos la expresión dada de y, llegamos a que

$$\begin{aligned}\Delta y &= (y+\Delta y)-y\\ &= A[x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]\\ &\quad+B[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]\\ &\quad+C(x+\Delta x)+D-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\\ &= A[3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]+B[2x\Delta x+(\Delta x)^2]+C\Delta x\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]+B(2x+\Delta x)+C$$

Haciendo que Δx se aproxime a cero, observamos que los tres términos de la derecha que incluyen a Δx como factor tenderán a cero en el límite. Los términos restantes dan el resultado siguiente:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to O}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3Ax^2+2Bx+C$$

A partir del resultado de este ejemplo, es posible obtener de nuevo algunos de los resultados de los ejemplos anteriores. Por ejemplo, si hacemos A = 0, B = 2, C = 3 y D = 1, la función cúbica del ejemplo 4 se convierte en $y=0x^3+2x^2+3x+1=2x^2+3x+1$, que se consideró en el ejemplo 2. De la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{dy}{dx}=3Ax^2+2Bx+C=3(0)x^2+2(2)x+3=4x+3$$

que es consistente con los resultados del ejemplo 2

Ejercicio 3.2

Calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes según el caso.

1. $f(x)=2x-5$
2. $f(x)=2-5x$
3. $g(x)=7$
4. $g(t)=-3$
5. $f(x)=x^2$
6. $g(t)=3t^2+1$
7. $f(u)=u^2+u+1$
8. $g(x)=x^2-3x+7$
9. $h(x)=7-3x^2$
10. $f(x)=1/x$

11. Calcula dy/dx si: (a) $y=3-2x^2$; (b) $y=3x+7$

12. Determina du/dt si: (a) $u=2t+3$; (b) $u=1/(2t+1)$

13. Determina $f'(2)$ si $f(x)=5-2x$
14. Calcula $g'(4)$ si $g(x)=(x+1)^2$
15. Encuentra $F'(3)$ si $F(t)=t^2-3t$
16. Determina $G'(1)$ si $G(u)=u^2-u+3$

Determina la pendiente de la tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Encuentra la ecuación de la línea tangente en cada caso,.

17. $y=3x^2-4$ en $x=2$
18. $y=x^2+x+2$ en $x=-2$
19. (Crecimiento de las ventas)
    El volumen de las ventas de un disco fonográfico particular está dado como una función del tiempo t por la fórmula
    $$S(t)=10{,}000+2000t-200t^2$$
    en donde t se mide en semanas y S es el número de discos vendidos por semana. Determina la razón en que S cambia cuando
    a. t = 0 b. t = 4 c. t = 8

20. (Crecimiento de la población)
    Cierta población crece de acuerdo con la fórmula
    $$p(t)=30{,}000+60t^2$$
    en donde t se mide en años. Calcula la tasa de crecimiento cuando:
    a. t = 2 b. t = 0 c. t = 5

3.3 Derivadas de Funciones Elevadas a una Potencia

Por lo que se expuso en la sección 3.2 quedó claro que el encontrar derivadas de funciones utilizando la propia definición de derivada no siempre es sencillo y por lo general lleva tiempo. Esta tarea puede simplificarse en forma apreciable usando ciertas fórmulas estándar. En esta sección, desarrollaremos fórmulas con objeto de encontrar las derivadas de funciones elevadas a una potencia y combinaciones de ellas.

Empecemos retomando el ejemplo 4 de la sección 3.2. Considerando casos especiales de los coeficientes A,B,C y D en ese ejemplo, obtenemos los resultados siguientes:

TEOREMA 1

(a) La derivada de una función constante es cero.
(b) Si $y=x$, entonces $dy/dx=1$
(c) Si $y=x^2$, entonces $dy/dx=2x$
(d) Si $y=x^3$, entonces $dy/dx=3x^2$

Demostración

(a) En la función $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, hagamos A,B y C iguales a cero. Entonces y = D, una función constante. La expresión general de dy/dx es $3Ax^2+2Bx+C$ (por el ejemplo 4 de la sección 3.2) y es cero cuando A = B = C = 0.

(b) Si hacemos A = B = D = 0 y C = 1, obtenemos $y=x$ y $dy/dx=1$, como se requería

(c) y (d) Se prueban en forma similar

En términos geométricos, la parte(a) del teorema 1 asegura que la pendiente de la recta y = c es cero en todo punto de ella. Es obvio que esto es cierto porque la gráfica de y = c es una recta horizontal, y cualquier recta horizontal tiene pendiente cero.

Ejemplo 1

$$\frac{d}{dx}(6)=0 \quad y \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

Con base en los resultados de las partes (a) a (d) del teorema 1, podemos observar cierto patrón en las derivadas de potencias de x, $y=x^n$. Tenemos el resultado siguiente que es válido para cualquier valor real de n.

TEOREMA 2

Si $y=x^n$, entonces $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$. (Fórmula de la potencia)

Verbalmente, a fin de encontrar la derivada de cualquier potencia constante de x, reducimos la potencia de x en 1 y multiplicamos por el exponente original de x.

Al final de esta sección, probaremos esta fórmula de la derivada de x^n en el caso que n sea un entero positivo. Sin embargo, es válida para todos los valores rea de n.

Ejemplo 2

(a) $\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$

(b) $\frac{d}{dy}(y^{3/2}) = \frac{3}{2}y^{3/2-1} = \frac{3}{2}y^{1/2}$

(c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{d}{dt}(t^{-1/2}) = -\frac{1}{2}t^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}t^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{t^3}}$

(d) $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right) = \frac{d}{du}(u^{-2}) = -2u^{-2-1} = -2u^{-3} = -\frac{2}{u^3}$

(e) $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1\cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ (porque $x^0 = 1$)

TEOREMA 3

Si $u(x)$ es una función diferenciable de x y c es una constante, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}}$$

Esto es, la derivada del producto de una constante y una función de x es igual producto de la constante y la derivada de la función.

Ejemplo 3

(a) $\frac{d}{dx}(cx^n) = c\frac{d}{dx}(x^n) = c(nx^{n-1}) = ncx^{n-1}$

(b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{t}\right) = \frac{d}{dt}(4t^{-1}) = 4\frac{d}{dt}(t^{-1}) = 4(-1\cdot t^{-2}) = -\frac{4}{t^2}$

(c) $\frac{d}{du}(2\sqrt{u}) = \frac{d}{du}(2u^{1/2}) = 2\frac{d}{du}(u^{1/2}) = 2\cdot\frac{1}{2}u^{1/2-1} = u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}}$

TEOREMA 4

Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferenciables de x, entonces

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

En otras palabras, "la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las dos funciones".

Ejemplo 4

Calcula dy/dx si $y = x^2 + \sqrt{x}$

Solución

La función dada es la suma de x^2 y $x^{1/2}$. En consecuencia, por el teorema 4, podemos diferenciar estas dos potencias por separado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{1/2})$$

$$= 2x + \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Este teorema puede extenderse de inmediato a la suma de cualquier número de funciones y también a diferencias entre funciones. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

etc.

Ejemplo 5

Determina la derivada de $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ con respecto a x.

Solución

Sea $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$

Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^3 + 7x + 2)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(2)$$

Usamos el teorema 4 a fin de expresar la derivada de la suma $3x^4 - 5x^3 + 7x + 2$ como la suma de las derivadas de $3x^4, -5x^3, 7x$ y 2. Calculando estas cuatro derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3(4x^3) - 5(3x^2) + 7(1x^0) + 0$$

$$= 12x^3 - 15x^2 + 7$$

porque $x^0 = 1$

Expresiones en que aparecen paréntesis pueden derivarse después de eliminar los paréntesis. Por ejemplo, si deseamos calcular dy/dx cuando $y=x^2(2x-3)$, en primer término escribimos $y=2x^3-3x^2$. En esta forma, podemos derivar y como en el ejemplo 5, y obtener $dy/dx=6x^2-6x$. O si $y=(x+2)(x^2-3)$, empezamos desarrollando los productos, obteniendo $y=x^3+2x^2-3x-6$. A partir de esta etapa, procedemos otra vez como en el ejemplo 5 y obtenemos que $dy/dx=3x^2+4x-3$.

En forma similar, podemos simplificar fracciones con denominadores monomiales antes de diferenciar. Por ejemplo, si

$$y=\frac{5t^4+7t^2-3}{2t^2}$$

escribimos primero $y=\frac{5}{2}t^2+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t^{-2}$. Después de derivar los tres términos por separado, obtenemos

$$\frac{dy}{dt}=5t+3t^{-3}$$

Demostración del teorema 3. Sea $y=cu(x)$. Entonces si x se reemplaza por $x+\Delta x$ se convierte en $u+\Delta u$ y en $y+\Delta y$, de modo que

$$y+\Delta y = cu(x+\Delta x) = c(u+\Delta u)$$

Restando tenemos que $\Delta y = c(u+\Delta u) - cu = c\Delta u$. La división de ambos lados entre Δx nos da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(c\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx},$$

como se requería. En forma alternativa, podemos escribir

$$\frac{d}{dx}[cf(x)]=c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Demostración del teorema 4.
Sea $y=u(x)+v(x)$. Si a x se le da un incremento Δx. Puesto que y, u y v son funciones de x, se incrementan en $y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v$, en donde

$$y+\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x) = (u+\Delta u)+(v+\Delta v)$$

La resta de y a $y+\Delta y$ da

$$\Delta y = (u+\Delta u+v+\Delta v)-(u+v)=\Delta u+\Delta v$$

Dividiendo entre Δx, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que Δx tienda a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

que es el resultado requerido.

Por último probaremos la fórmula de las potencias cuando n es un entero positivo. La demostración dada utiliza el resultado siguiente del álgebra.

Si n es un entero positivo.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Este resultado es fácil de verificar multiplicando las dos expresiones del lado derecho término a término. Debe observarse que el número de términos en el segundo paréntesis de la derecha es igual a n, la potencia de a y b en el lado izquierdo.

Considere los ejemplos siguientes

$$n=2: a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$n=3: a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$n=4: a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3), \text{ etc.}$$

Demostración del teorema 2

La derivada de x^n con respecto a x es nx^{n-1}, en donde n es un entero positivo.

Demostración
Sea $y=x^n$. Cuando x cambia a $x+\Delta x$, se incrementa a $y+\Delta y$, en donde

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

La sustracción del valor de y de $y+\Delta y$ nos da

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

Con el objeto de simplificar esta expresión de Δy, usamos la identidad algebraica que se dio antes, haciendo $a=x+\Delta x$ y $b=x$. Así pues, $a-b=(x+\Delta x)-x=\Delta x$, de modo que

$$\Delta y=\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+(x+\Delta x)^{n-3}\cdot x^2+\ldots +(x+\Delta x)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}]$$