Solución
Podríamos resolver este problema desarrollando $(x^2+1)^5$ como un polinomio en x. Sin embargo, es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

Observe que y puede expresarse como la composición de dos funciones en la forma siguiente.

$$y=u^5 \quad \text{donde} \quad u=x^2+1$$

Se sigue que

$$\frac{dy}{du}=5u^4 \quad y \quad \frac{du}{dx}=2x$$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=5u^4\cdot 2x$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot 2x=10x(x^2+1)^4$$

Si $y=f(u)$, otra manera de escribir la regla de la cadena es

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$$

(dado que $f'(u)=dy/du$). En particular, si $f(u)=u^n$, $f'(u)=nu^{n-1}$. Así tenemos el caso siguiente de la regla de la cadena

Si $y=[u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

La composición puede pensarse como el tener diferentes capas que deben desprenderse una por una. La capa exterior de la función corresponde a la parte que debe calcularse al último al evaluarla. Por ejemplo, si $y=(x^2+1)^5$, la parte exterior de la función es la quinta potencia y la parte interior es (x^2+1). Al evaluar y para 1, y luego elevar a la quinta potencia. Por ejemplo, si $x=2$, entonces la interior$=x^2+1=2^2+1=5$ y $y=(\text{interior})^2=5^5=3125$

Al derivar una función compuesta, debemos derivar primero la capa exterior de la función, y después multiplicar por la derivada de la parte interior. En estos términos verbales podemos reformular la regla de la cadena en la forma siguiente

Si y = f(interior), $\frac{dy}{dx}=$ f'(interior)·(derivada del interior con respecto a x)
Si y = (interior)^n, $\frac{dy}{dx}=$ n(interior)$^{n-1}$·(derivada del interior con respecto a x)

Aquí interior significa cualquier función diferenciable de x.

Por ejemplo, volviendo a $y=(x^2+1)^5$, pudimos tomar el interior como x^2+1 y f(interior) = (interior)^5. Se sigue de inmediato que,

$$\frac{dy}{dx}=$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot 2x=10x(x^2+1)^4$$

lo que da la misma respuesta que antes

Ejemplo 5
Dada f(t) = $1/\sqrt{t^2+3}$, calcula f'(t)

Solución
Sea $u=t^2+3$, de modo que $y=f(t)=1/\sqrt{u}=u^{-1/2}$. Se sigue que

$$\frac{du}{dt}=2t \quad y \quad \frac{dy}{du}=-\tfrac{1}{2}u^{-3/2}=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}$$

Así que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$
$$=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}\cdot 2t=-t(t^2+3)^{-3/2}$$

En forma alternativa, podemos resolver directamente,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}=(t^2+3)^{-1/2}$$

Aquí el interior es (t^2+3) y el exterior es la potencia $-\tfrac{1}{2}$. Usando la fórmula de la potencia a fin de derivar la parte exterior, tenemos

$$f'(t)=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-1/2-1}\cdot\frac{d}{dt}(t^2+3)$$

$$=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}\cdot 2t=t(t^2+3)^{-3/2}$$

Ejemplo 6
Dada $y=(x^2+5x+1)(2-x^2)^4$, calcula dy/dx

Solución
Utilizando la regla del producto de derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+5x+1)\frac{d}{dx}(2-x^2)^4+(2-x^2)^4\frac{d}{dx}(x^2+5x+1)$$

Con objeto de evaluar $(d/dx)(2-x^2)^4$, podemos usar la regla de la cadena con interior $=(2-x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+5x+1)\left[4(2-x^2)^3 \frac{d}{dx}(2-x^2)\right]+(2-x^2)^4(2x+5)$$

$$= (x^2+5x+1)[4(2-x^2)^3\cdot(-2x)]+(2-x^2)^4(2x+5)$$
$$= -8x(2-x^2)^3(x^2+5x+1)+(2x+5)(2-x^2)^4$$

La factorización produce ahora

$$\frac{dy}{dx} = (2-x^2)^3[-8x(x^2+5x+1)+(2x+5)(2-x^2)]$$
$$= (2-x^2)^3[10-4x-45x^2-10x^3]$$

Demostración del teorema 3

La demostración de la regla de la cadena, cuando se presenta en forma detallada, es un poco más complicada que la dada aquí. Por tanto incluimos una demostración que, si bien cubre la mayoría de los casos que consideraremos, tiene algunas restricciones en su rango de aplicabilidad.

Sea Δx un incremento en x. Puesto que u y y son funciones de x, variarán siempre que x lo haga, de modo que denotaremos sus incrementos por Δu y Δy. Por tanto, a condición de que $\Delta u \neq 0$, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Hacemos ahora que $\Delta x \to 0$. En este límite, también tenemos que $\Delta u \to 0$ y que $\Delta y \to 0$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

como se requería.

La razón de que esta demostración esté incompleta estriba en la suposición de que $\Delta u \neq 0$. Para la mayoría de las funciones $u(x)$, nunca se dará el caso de que Δu se haga cero si Δx es muy pequeño (pero $\Delta x \neq 0$). Sin embargo, es posible que una función $u(x)$ pueda tener la peculiaridad de que Δu se haga cero repetidas veces a medida que $\Delta x \to 0$. Cuando se presentan tales funciones, la demostración dada deja de ser válida. Es posible modificar la demostración a fin de cubrir casos como éste, pero no lo haremos aquí.

Ejercicio 3.5

Usando la regla del producto, calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable respectiva.

1. $y=(x+1)(x^3+3)$
2. $y=(x^3+6x^2)(x^2-1)$
3. $u=(7x+1)(2-3x)$
4. $u=(x^2+7x)(x^2+3x+1)$
5. $f(x)=(x^2-5x+1)(2x+3)$
6. $g(x)=(x^2+1)(x+1)^2$
7. $f(x)=(3x+7)(x-1)^2$
8. $y=(t^2+1)(t-1/t)$
9. $u=(y+3/y)(y^2-5)$
10. $g(x)=(x^2+1)(3x-1)(2x-3)$

(Ingreso marginal) Usando la regla del producto, calcula el ingreso marginal de las relaciones de demanda siguientes

11. $x=1000-2p$
12. $p=40-\frac{1}{2}\sqrt{x}$
13. $x=4000-10\sqrt{p}$
14. $p=15-0.1x^{0.6}-0.3x^{0.3}$

Usa la regla del cociente con objeto de calcular las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

15. $y=\dfrac{3}{2x+7}$
16. $f(t)=\dfrac{5t}{2-3t}$
17. $y=\dfrac{u}{u+1}$
18. $f(x)\ \dfrac{x+2}{x-1}$
19. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$
20. $g(x)=\dfrac{3-x}{x^2-3}$

Calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

21. $y=(3x+5)^7$
22. $y=\sqrt{5-2t}$
23. $u=(2x^2+1)^{3/2}$
24. $x=(y^3+7)^6$
25. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$
26. $h(t)=\sqrt{t^2+a^2}$
27. $F(x)=\sqrt[3]{x^3+3x}$
28. $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}$
29. $y=(t^2+1/t^2)^5$
30. $y=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+9}}$

31. $y=(x^2+1)^{0.6}$

32. $G(u)=(u^2+1)^3(2u+1)$

33. $H(y)=(2y^2+3)^6(5y+2)$

34. $f(x)=(x+1)^3(2x+1)^4$

35. $g(t)=(3x-1)^5(2x+3)^4$

36. $f(x)=x^3(x^2+1)^7$

37. $u= x^2\sqrt{x^3+a^3}$

38. $z= \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

39. $y= \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$

40. $x= \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+4}}$

41. (Móvil)

La distancia recorrida por un automóvil al tiempo t está dada por $y=(3t+1)\sqrt{t+}$

Calcula su velocidad instantánea en el instante t.

42. (Crecimiento y variación de la población)

El tamaño de cierta población al tiempo t es

$$P(t)= \left(\frac{t^2+3t+1}{t+1}\right)^6$$

Determina la tasa de cambio del tamaño de la población.

(Costos marginales) Encuentra los costos marginales de las funciones de costo siguientes:

43. $C(x)= \sqrt{100+x^2}$

44. $C(x)=20+2x-\sqrt{x^2+1}$

3.6 Derivadas de Orden Superior

La operación derivada toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora se deriva f' se producirá otra función que se designa como f'' (se lee "f biprima") y que se llama segunda derivada de f. Esta, a su vez, puede ser derivada para producir f''', que se llama tercera derivada de f, etc. Por ejemplo, sea

$$f(x)=2x^3-4x^2+7x-8$$

Entonces

$$f'(x) =6x^2-8x+7$$
$$f''(x) =12x-8$$
$$f'''(x) =12$$
$$f''''(x)=0$$

Dado que la derivada de la función cero es cero, todas las derivadas de mayor orden serán cero.

Hemos presentado dos notaciones de la derivada (que ahora se llamará también primera derivada) de $y=f(x)$. Esta son:

$$f'(x) \qquad \frac{dy}{dx}$$

llamadas respectivamente, la notación prima y la notación de Leibniz. Existe una variación de la notación prima, nombrada y', que también usaremos en ocasiones. Todas estas notaciones se extienden a las derivadas de orden superior, como se muestra en el diagrama siguiente. Observa que aunque la notación de Leibniz es complicada, resulta ser la más apropiada y natural, al menos así lo pensaba él al escribir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad como \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Derivada	f' notación	y' notación	D notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	D_xy	$\dfrac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	D_x^2y	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	D_x^3y	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f''''(x)$	y''''	D_x^4y	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$
Quinta	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	D_x^5y	$\dfrac{d^5y}{dx^5}$
Sexta	$f^{(6)}(x)$	$y^{(6)}$	D_x^6y	$\dfrac{d^6y}{dx^6}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
nésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	D_x^ny	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplo 1

Si $y=2x^5-3x^4+4x^3-5x^2-x+9$, encuentra $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ y $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4-12x^3+12x^2-10x-1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3-36x^2+24x-10$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2-72x+24$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 240x-72$$

Velocidad y aceleración

En la sección 3.2 usamos el concepto de velocidad instantánea para motivar la definición de derivada. Revisemos esta noción mediante un ejemplo. También, desde ahora, usaremos sólo la palabra velocidad en lugar de la frase más usual de velocidad instantánea.

Ejemplo 2
Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición s satisface $s=2t^2-12t+8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos con $t\geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t=1$ y cuando $t=6$. ¿Cuándo es 0 la velocidad? ¿Cuándo es positiva?

Solución
Si usamos el símbolo v(t) como velocidad en el instante t, entonces

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=4t-12$$

Por lo tanto,

$$v(1)=4(1)-12=-8 \text{ centímetros por segundo}$$
$$v(6)=4(6)-12=12 \text{ centímetros por segundo}$$

La velocidad es cero cuando $4t-12=0$, es decir, cuando $t=3$. La velocidad es positiva cuando $4t-12>0$, o sea cuando $t>3$. Todo esto se muestra esquemáticamente en la figura 6.

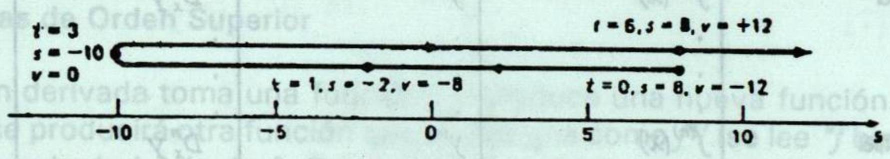

Fig. 6

Por supuesto, el objeto, se mueve a lo largo del eje de las s, no en la trayectoria dibujada arriba de éste. La trayectoria dibujada muestra lo que ocurre al objeto. Entre $t=0$ y $t=3$, la velocidad es negativa. El objeto se mueve hacia la izquierda (de regreso). En el momento $t=3$, se ha "frenado" a la velocidad cero, y entonces emprende la marcha hacia la derecha, con lo que la velocidad se vuelve positiva. Luego, la velocidad negativa corresponde al movimiento en dirección de s; la velocidad positiva corresponde a la dirección creciente de s.

Hay una distinción técnica entre las palabras velocidad y rapidez. La velocidad tiene un signo asociado a ella; puede ser positivo o negativo. La rapidez se define como el valor absoluto de la velocidad. Entonces, en el ejemplo anterior, la rapidez en t = l es $|-8|=8$ centímetros por segundo. El medidor de la mayoría de los automóviles es un "rapidómetro" (celerómetro) y siempre da valores no negativos.

Ahora queremos dar una interpretación física a la segunda derivada d^2s/dt^2. Por supuesto que no es más que la primera derivada de la velocidad. Por tanto, mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, y se llama aceleración. Si la designamos con a, entonces

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el ejemplo 2, $s=2t^2-12t+8$. Por lo tanto

$$v=\frac{ds}{dt}=4t-12$$

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=4$$

Esto significa que la velocidad aumenta a razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo, y escribimos 4 centímetros por segundo por segundo.

1
Problemas de caída de los cuerpos.

Si un cuerpo es arrojado verticalmente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial de s_o pies con una velocidad inicial de v_o pies por segundo, y si s es la altura sobre el piso (en pies) después de t segundos, entonces

$$s=-16t^2+v_ot+s_o$$

Esto presupone que el experimento tiene lugar cerca del nivel del mar y que se puede despreciar la resistencia del aire. El diagrama de la figura 7 representa la situación que tenemos en mente.

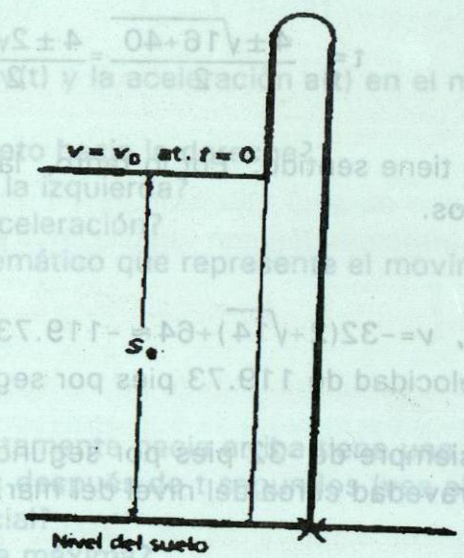

Fig. 7

Ejemplo 3
Supongamos que se arroja una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima?
c) ¿Cuándo llega al piso?
d) ¿Con qué velocidad llega al piso?
e) ¿Cuál es su aceleración al momento $t=2$?

Solución
Sea $t=0$ que corresponde al instante cuando la pelota es arrojada. Entonces $s_o=160$ y $v_o=64$, por lo que

$$s=-16t^2+64t+160$$

$$v=\frac{ds}{dt}=-32t+64$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-32$$

a) La bola alcanza su altura máxima en el momento en que su velocidad es 0; esto es, cuando $-32t+64=0$, o sea $t=2$ segundos.
b) Cuando $t=2$, $s=-16(2)^2+64(2)+160=224$ pies
c) La pelota golpea el piso cuando $s=0$; es decir, cuando

$$-16t^2+64t+160=0$$

Si dividimos entre -16 y usamos la fórmula cuadrática, obtenemos

$$t^2-4t-10=0$$

$$t=\frac{4\pm\sqrt{16+40}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{14}}{2}=2\pm\sqrt{14}$$

Sólo la respuesta positiva tiene sentido. Por lo tanto, la pelota llega al suelo a los $t=2+\sqrt{14}\approx5.74$ segundos.

d) Cuando $t=2+\sqrt{14}$, $v=-32(2+\sqrt{14})+64\approx-119.73$. Entonces, la pelota llega al suelo con una velocidad de 119.73 pies por segundo.

e) La aceleración es siempre de -32 pies por segundo por segundo. Esta es la aceleración de la gravedad cerca del nivel del mar.

Ejercicio 3.6

En los problemas 1 a 4 encuentre d^2y/dx^2

1. $y=x^3+3x^2-2x-8$
2. $y=2x^5-x^4$
3. $y=(2x+5)^3$
4. $y=(3x-2)^2$

En los problemas 5 a 8 encuentra $f''(2)$
5. $f(x)=2x^3-7$
6. $f(x)=5x^3+1$
7. $f(t)=\dfrac{1}{t}$
8. $f(x)=x(x^2+1)$

9. Sin hacer ningún cálculo, encuentra cada derivada
a. $D_x^4(2x^3+3x-19)$
b. $D_x^5(x^4-7x^2+12)$
c. $D_x^5(x^2-4)^2$

En los problemas 10 y 11, un objeto se mueve a lo largo del eje horizontal coordenado de acuerdo con la fórmula $s=f(t)$, donde la distancia s se mide a partir del origen y está dada en pies y t en segundos. En cada caso, contesta las siguientes preguntas (vea los ejemplos 2 y 3)

a) ¿Cuáles son la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ en el momento t?

b) ¿Cuándo se mueve el objeto hacia la derecha?
c) ¿Cuándo se mueve hacia la izquierda?
d) ¿Cuándo es negativa la aceleración?
e) Dibuja un diagrama esquemático que represente el movimiento del objeto.

10. $s=12t-2t^2$
11. $s=t^3-6t^2$

12. Un objeto arrojado directamente hacia arriba tiene una altura $s=-16t^2+48t+256$ pies después de t segundos (vea el ejemplo 3)
a) ¿Cuál es su velocidad inicial?
b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿Cuándo alcanza el piso?
e) ¿Con qué velocidad llega al piso?