CAPÍTULO 4
APLICACIONES DE LA DERIVADA

INTRODUCCIÓN

Muchas de las aplicaciones importantes de las derivadas requieren determinar los valores máximos y mínimos de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que un fabricante obtiene depende del precio fijado al producto, y al fabricante le interesa conocer el precio que produce una utilidad máxima. Este precio "óptimo" (o mejor precio) se obtiene mediante un proceso denominado "maximización" u "optimización" de la función de utilidad. En forma similar a una compañía de bienes raíces le puede interesar la renta que debe fijar a las oficinas o departamentos que controla a fin de generar el máximo ingreso por rentas; o una compañía ferroviaria puede requerir conocer la velocidad promedio que sus trenes deberán desarrollar con objeto de minimizar el costo por kilómetro de operación; o un economista puede necesitar conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa de crecimiento máxima de la economía. Antes de abordar este tipo de aplicaciones debemos de estudiar la teoría de máximos y mínimos.

4.1 Derivadas y Gráficas de Funciones

En esta sección, consideraremos el significado de la primera y segunda derivadas de una función en relación con su gráfica. Empezaremos con la primera derivada.

Definición

Una función $y=f(x)$ se dice que es una función creciente sobre un intervalo de valores de x si y crece al incrementarse la x. Esto es, si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera en el intervalo dado con $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Una función $y=f(x)$ se dice que es una función decreciente sobre un intervalo de su dominio si y decrece al incrementarse la x. Es decir, si $x_2 > x_1$ son dos valores de x en el intervalo dado, entones $f(x_2) < f(x_1)$.

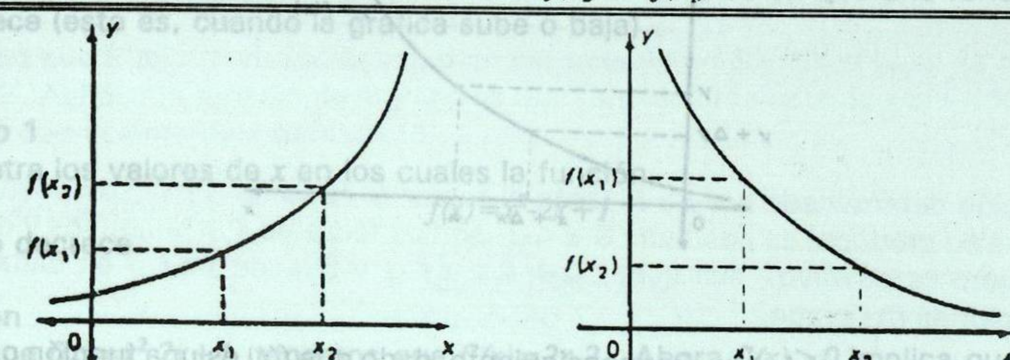

Fig. 1

Las partes (a) y (b) de la figura 1 ilustran una función creciente y otra decreciente, respectivamente. La gráfica sube o baja, respectivamente, al movernos de izquierda a derecha.

Teorema 1
a) Si $f(x)$ es una función creciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \geq 0$.
b) Si $f(x)$ es una función decreciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \leq 0$.

Demostración
a) Sean x y $x+\Delta x$ dos valores de la variable independiente, con $y=f(x)$ y $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ los valores correspondientes de la variable dependiente. Se sigue que

$$\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)$$

Debemos considerar dos casos, según que $\Delta x>0$ ó $\Delta x<0$. Están ilustrados en las figuras 2 y 3.

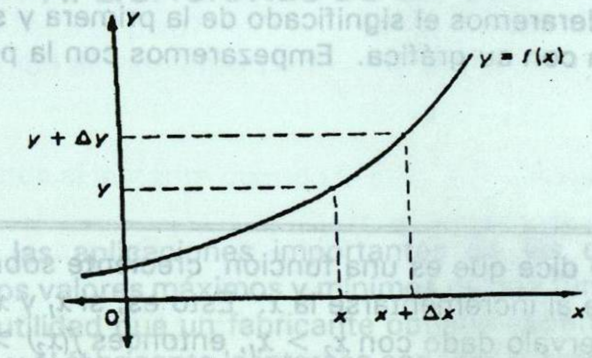

Fig. 2

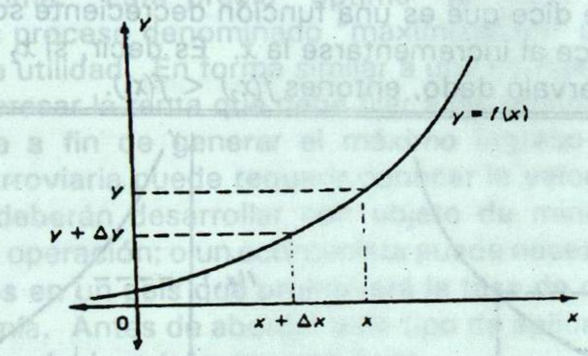

Fig. 3

Si $\Delta x>0$, entonces $x+\Delta x>x$. Por consiguiente, dado que $f(x)$ es una función creciente, $f(x+\Delta x)>f(x)$, y así que $\Delta y>0$. En consecuencia, tanto Δx como Δy son positivos, de modo que $\Delta y/\Delta x>0$.

La segunda posibilidad es que $\Delta x<0$. Entonces $x+\Delta x<x$ y así $f(x+\Delta x)<f(x)$. De aquí $\Delta y<0$. En este caso, tanto Δx como Δy son negativos, de modo que otra vez $\Delta y/\Delta x>0$.

Así que en ambos casos, $\Delta y/\Delta x$ es positiva. La derivada $f'(x)$ es el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x\to 0$, y dado que $\Delta y/\Delta x$ siempre es positiva, es claro que es imposible aproximarse a un número negativo como valor límite. En consecuencia $f'(x)\geq 0$, como se establece en el teorema.

La demostración de la parte (b), cuando $f(x)$ es una función decreciente, es muy similar y se deja como un ejercicio.

Este teorema tiene una proposición recíproca, que puede establecerse de la manera siguiente.

Teorema 2

(a) Si $f'(x)>0$ para toda x en algún intervalo, entonces $f(x)$ es una función creciente de x sobre tal intervalo.

(b) Si $f'(x)<0$ para toda x en algún intervalo, entonces $f(x)$ es una función decreciente de x sobre tal intervalo.

La demostración de este teorema no se dará. Sin embargo, es un resultado intuitivamente obvio. En la parte (a), por ejemplo, el hecho de que $f'(x)>0$ significa, geométricamente, que la tangente a la gráfica en cualquier punto tiene pendiente positiva. Si la gráfica de $f(x)$ siempre está inclinada hacia arriba al movernos a la derecha, entonces es claro que y debe crecer a media que x aumenta. En forma análoga, en la parte (b), si $f'(x)<0$, entonces la gráfica está inclinada hacia abajo y y decrece cuando x aumenta.

Estos teoremas se usan a fin de determinar los intervalos en que una función crece o decrece (esto es, cuando la gráfica sube o baja).

Ejemplo 1

Encuentra los valores de x en los cuales la función

$$f(x)=x^2-2x+1$$

crece o decrece.

Solución

Dado que $f(x)=x^2-2x+1$, tenemos que $f'(x)=2x-2$. Ahora $f'(x)>0$ implica que $2x-2>0$, esto es, $x>1$. En consecuencia, $f(x)$ es creciente en todos los valores de x dentro del intervalo definido por $x>1$. De manera similar, $f'(x)<0$ implica que $2x-2<0$, esto es, $x<1$. La función decrece si $x<1$.

La gráfica de $y=f(x)$ aparece en la figura 4. (Observa que f(1) = 0, de modo que el punto (1,0) está sobre la gráfica). Si $x<1$, la gráfica está inclinada hacia abajo y para $x>1$, está inclinada hacia arriba.

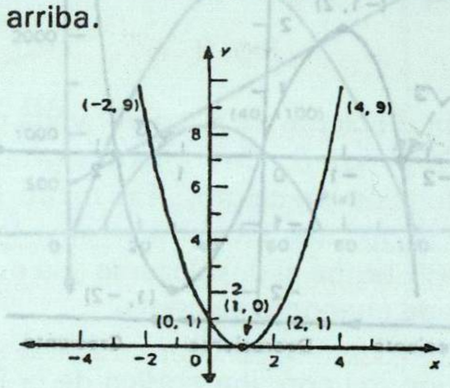

Fig. 4

Ejemplo 2
Determina los valores de x en los cuales la función

$$f(x)=x^3-3x$$

crece o decrece

Solución

Tenemos que $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Con objeto de determinar el intervalo en que $f(x)$ crece, hacemos $f'(x)>0$, esto es,

$$3(x-1)(x+1)>0$$

El procedimiento consiste en examinar los signos de los factores $(x-1)$ y $(x+1)$. Estos se ilustran en la figura 5. El factor $(x-1)$ es positivo si $x>1$ y negativo en el caso de que $x<1$. Mientras que $(x+1)$ es positivo si $x>-1$ y negativo para $x<-1$.

$(x-1)$ - - - - - - - - - - - - - - + + + + + +

$(x+1)$ - - - - - + + + + + + + + + +

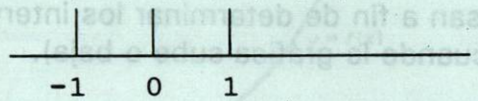

Fig. 5

En la región determinada por $x>1$, tanto el factor $(x-1)$ como $(x+1)$ son positivos, de modo que su producto es positivo. Si $x<-1$, ambos factores son negativos y de nuevo su producto es positivo. Así que, $f'(x)>0$ si $x<-1$ y cuando $x>1$ y en cada una de estas regiones $f(x)$ crece.

En la región definida por $-1<x<1$, el producto $(x-1)(x+1)$ es negativo porque los dos factores tienen signos opuestos. En esta región, por consiguiente, $f(x)$ decrece.

La gráfica de $f(x)$ se aprecia en la figura 6.

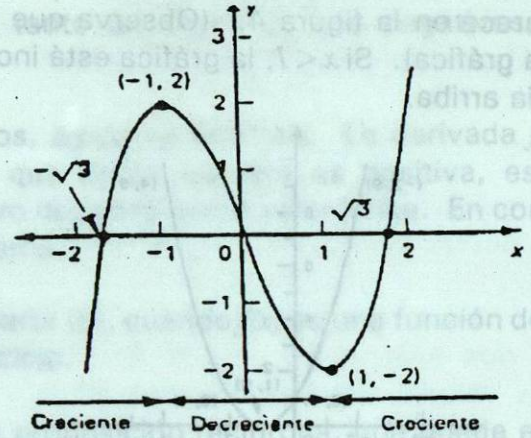

Fig. 6

Ejemplo 3

(Análisis de las funciones de costo, ingreso y utilidad). En el caso de la función de costo $C(x)=500+20x$ y la relación de demanda $p=100-x$, determina las regiones en que la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad son funciones crecientes o decrecientes de x.

Solución

Puesto que $C(x)=500+20x$, $C'(x)=20$ siempre es positiva. De ahí que la función de costo sea una función creciente de x para todos los valores de x. La función de ingreso es

$$R(x)=xp=x(100-x)=100x-x^2$$

Así pues, el ingreso marginal es

$$R'(x)=100-2x$$

De modo que $R'(x)>0$ si $100-2x>0$, esto es, cuando $x<50$. En el caso de que $x>50$, $R'(x)<0$. Así que la función de ingreso es una función creciente de x si $x<50$ y es una función decreciente de x para $x>50$.

La función de utilidad es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x) \\ &= 100x-x^2-(500+20x) \\ &= 80x-x^2-500 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $P'(x)=80-2x$ y $P'(x)>0$ cuando $80-2x>0$ ó $x<40$; en forma alternativa, $P'(x)<0$ si $x>40$. De modo que la función de utilidad es una función creciente de x si $x<40$, y es una función decreciente de x para $x>40$. Las gráficas de las tres funciones aparecen en la figura 7.

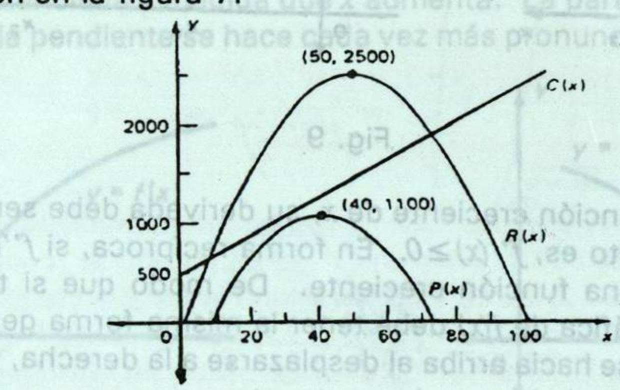

Fig. 7

El tipo de comportamiento que estas tres funciones presentan es bastante típico de las funciones generales de costo, ingreso y utilidad. La función de costo por lo regular es una función creciente de la cantidad de bienes producidos (casi siempre cuesta más producir más, si bien ocurren excepciones con ciertas políticas de precios).

De manera similar, la función de ingreso es, en general, una función creciente para pequeños volúmenes de ventas, pero por lo regular se transforma en una función decreciente cuando consideramos grandes volúmenes de ventas. La función de utilidad tiene este mismo comportamiento de crecimiento para x pequeña y decrece en el caso de que x sea grande.

Advertimos de lo antes expuesto que el signo de la primera derivada tiene un significado geométrico que es de gran utilidad cuando necesitamos obtener una idea cualitativa de la gráfica de una función. Se abordará ahora la segunda derivada, la cual, como veremos, también tiene una importante interpretación geométrica.

Considere una función $f(x)$ cuya gráfica tiene la forma general que se aprecia en la figura 8. La pendiente de la gráfica es positiva, $f'(x)>0$, de modo que y es una función creciente de x. Más aún, la gráfica tiene la propiedad de que al movernos hacia la derecha (esto es, cuando x crece), la pendiente de la gráfica se hace más pronunciada. Es decir, la derivada $f'(x)$ también es una función creciente de x. La gráfica de $f'(x)$ debe tener la forma indicada cualitativamente en la figura 9.

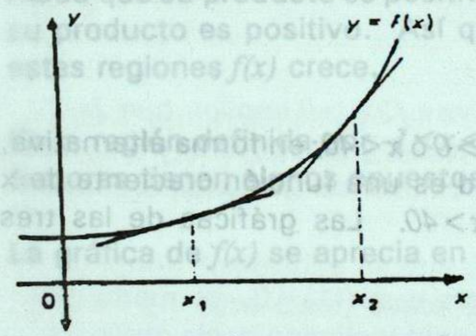

Fig. 8

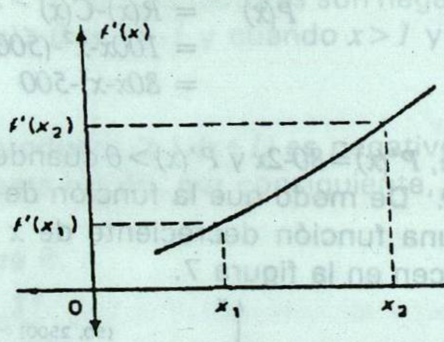

Fig. 9

Ahora, si $f'(x)$ es una función creciente de x, su derivada debe ser mayor o igual que 0 por el teorema 1. Esto es, $f''(x)\geq 0$. En forma recíproca, si $f''(x)>0$ entonces por el teorema 2 $f'(x)$ es una función creciente. De modo que si tanto $f'(x)>0$ como $f''(x)>0$ entonces la gráfica de $f(x)$ debe tener la misma forma general indicada en la figura 8. Debe inclinarse hacia arriba al desplazarse a la derecha, y la pendiente debe ser cada vez más pronunciada cuando x aumenta.

Analicemos ahora una función $f(x)$ con una gráfica de la forma que se observa en la figura 10. Aquí la gráfica se inclina hacia abajo al movernos a la derecha, con $f'(x)<0$,

pero la pendiente es cada vez menos pronunciada a media que x aumenta. Así que, $f'(x)$ es creciente a partir de valores negativos grandes pudiendo llegar hasta cero, como se aprecia en la figura 11. De nuevo $f'(x)$ es una función creciente de x, de modo que $f''(x)\geq 0$.

De manera recíproca, si $f'(x)<0$ y $f''(x)>0$, se sigue que la gráfica de $f(x)$ presenta la forma general de la figura 10. Esto es, la gráfica se inclina hacia abajo al desplazarnos a la derecha pero es cada vez menos pronunciada a medida que x aumenta.

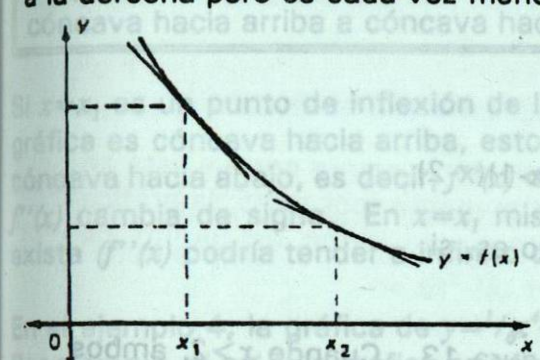

Fig. 10

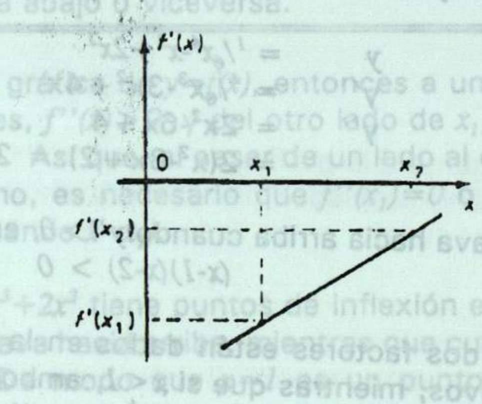

Fig. 11

La propiedad geométrica que caracteriza ambos tipos de gráficas es que son cóncavas hacia arriba. Concluimos, por tanto, que si la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia arriba, entonces $f''(c)\geq 0$. En forma recíproca, si $f''(x)>0$, se sigue que la gráfica de $y=f(x)$ debe ser cóncava hacia arriba.

Ahora consideremos la posibilidad alternativa, esto es, que la gráfica de $y=f(x)$ sea cóncava hacia abajo. Los casos que corresponden a los dos tipos ya considerados se observan en la figura 12. La parte (a) ilustra el caso en que $f'(x)>0$ pero la pendiente se hace menos pronunciada a medida que x aumenta. La parte (b) ejemplifica el caso en donde $f'(x)<0$ y la pendiente se hace cada vez más pronunciada cuando x aumenta.

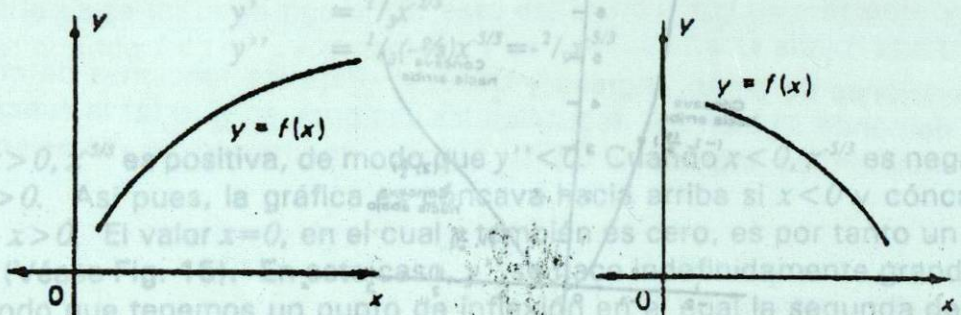

Fig. 12

a) b)

En cada caso, $f'(x)$ es una función decreciente de x. Por consiguiente, concluimos que cuando la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia abajo, $f''(x) \leq 0$. Recíprocamente, cuando $f''(x) < 0$, la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 4

Encuentra los valores de x en los cuales la gráfica de

$$y = {}^1/_6x^4 - x^3 + 2x^2$$

es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

$$\begin{aligned} y &= {}^1/_6x^4 - x^3 + 2x^2 \\ y' &= {}^4/_6x^3 - 3x^2 + 4x \\ y'' &= 2x^2 - 6x + 4 \\ &= 2(x^2 - 3x + 2) = 2(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

La gráfica es cóncava hacia arriba cuando $y'' > 0$, esto es, si

$$(x-1)(x-2) > 0$$

Los signos de los dos factores están dados en la figura 13. Cuando $x > 2$, ambos factores son positivos, mientras que si $x < 1$, ambos factores son negativos. En los dos casos su producto es positivo, de modo que $y'' > 0$. Por otro lado, cuando $1 < x < 2$ los factores $(x-1)$ y $(x-2)$ tienen signos opuestos, de modo que $y'' < 0$.

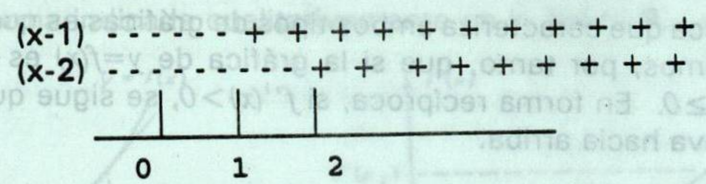

Fig. 13

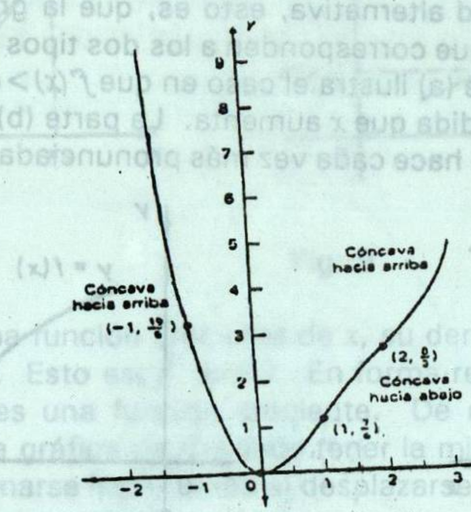

Fig. 14

Así que la función dada es cóncava hacia arriba si $x < 1$ ó $x > 2$ y cóncava hacia abajo en el caso de que $1 < x < 2$. Estas propiedades se observan en la gráfica de la figura 14.

Definición

Un punto de inflexión de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Si $x = x_1$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y=f(x)$, entonces a un lado de x_1 la gráfica es cóncava hacia arriba, esto es, $f''(x) > 0$; y del otro lado de x_1, la gráfica es cóncava hacia abajo, es decir, $f''(x) < 0$. Así que, al pasar de un lado al otro de $x = x_1$, $f''(x)$ cambia de signo. En $x = x_1$ mismo, es necesario que $f''(x_1) = 0$ o que $f''(x_1)$ no exista ($f''(x)$ podría tender a infinito cuando $x \to x_1$).

En el ejemplo 4, la gráfica de $y = {}^1/_6x^4 - x^3 + 2x^2$ tiene puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 2$. Por ejemplo, si $x < 1$, la gráfica es cóncava hacia arriba, mientras que cuando $1 < x < 2$, la gráfica es cóncava hacia abajo. De modo que $x = 1$ es un punto en donde la concavidad cambia, es decir, un punto de inflexión. Esto también se aplica a $x = 2$.

En el ejemplo 4 los puntos de inflexión están dados por $y'' = 0$.

Ejemplo 5

Determina los puntos de inflexión de $y = x^{1/3}$

Solución

Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= {}^1/_3x^{-2/3} \\ y'' &= {}^1/_3(-{}^2/_3)x^{-5/3} = -{}^2/_9x^{-5/3} \end{aligned}$$

Ahora, si $x > 0$, $x^{-5/3}$ es positiva, de modo que $y'' < 0$. Cuando $x < 0$, $x^{-5/3}$ es negativa, por lo que $y'' > 0$. Así pues, la gráfica es cóncava hacia arriba si $x < 0$ y cóncava hacia abajo para $x > 0$. El valor $x = 0$, en el cual y también es cero, es por tanto un punto de inflexión. (Véase Fig. 15). En este caso, y'' se hace indefinidamente grande cuando $x \to 0$, de modo que tenemos un punto de inflexión en el cual la segunda derivada no existe. (Obsérvese también que cuando $x \to 0$, y' tiende a infinito, por lo que la pendiente de la gráfica tiende a ser vertical en el origen para esta función particular).

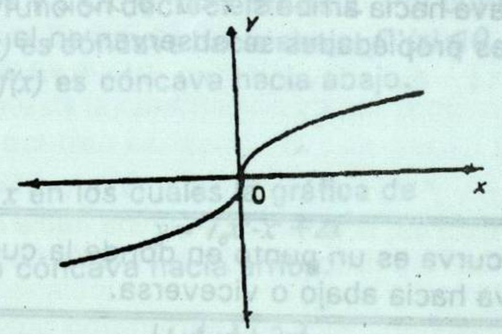

Fig. 15

Observa que la tangente a la gráfica es un punto de inflexión siempre corta a ésta en tal punto. Ésta es una propiedad poco común de una tangente (por regla, la gráfica está situada por completo a un lado de la línea tangente cerca del punto de tangencia).

Ejercicio 4.1

Determina los valores de x en los cuales las funciones siguientes son: (a) crecientes; (b) decrecientes; (c) cóncavas hacia arriba y (d) cóncavas hacia abajo. También, encuentra los puntos de inflexión, si los hay.

1. $y= x^2-6x+7$
2. $y=x^3-12x+10$
3. $f(x)=x^3-3x+4$
4. $f(x)=2x^3-9x^2-24x+20$
5. $f(x)=x+{}^1/_x$
6. $f(x)=x^2+{}^1/x^2$
7. $y=x^5-5x^4+1$
8. $y=x^7-7x^6$
9. $y=x^2-4x+5$
10. $y=x^3-3x+2$
11. $y=5x^6-6x^5+1$
12. $y=x^4-2x^2$
13. $y=x^{2/3}$

(Análisis de funciones de costo, ingreso y utilidad) Para las funciones de costo y relaciones de demanda siguientes, determina las regiones en que (a) la función de costo, (b) la función de ingreso y (c) la función de utilidad son crecientes o decrecientes.

14. $C(x)=2000+10x$; $p=100-½x$
15. $C(x)=4000+x^2$; $p=300-2x$

4.2 Bosquejo de Curvas Polinomiales

A menudo ocurre que nos gustaría obtener un dibujo cualitativo aproximado de cómo la gráfica de una función dada se vería sin necesidad de tabular un gran número de puntos. La primera y segunda derivadas son herramientas efectivas para este fin. En esta sección, estudiaremos su uso aplicado a funciones polinomiales. Las gráficas que aparecen en las figuras 6 y 14 de la sección 4.1 se obtuvieron por los métodos que a continuación se describen.

Ejemplo 1
Bosqueja la gráfica de la función $y=2x^3-9x^2+12x-2$

Solución

1. En primer término determinaremos en dónde la función es creciente o decreciente:

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2-18x+12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Así que, $y'>0$ cuando $x<1$ o si $x>2$, de modo que en estos dos intervalos la gráfica es creciente. En el intervalo $1<x<2$ es decreciente. (Véase la parte (a) de la Fig. 16). Enseguida encontramos las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos. De inmediato se advierte que $y=3$ si $x=1$ y $y=2$ cuando $x=2$, por lo que los puntos son (1,3) y (2,2).

2. Ahora examinaremos en dónde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Tenemos que:

$$y'' = 12x-18$$

y así $y''>0$ si $x>{}^3/_2$ mientras que $y''<0$ cuando $x<{}^3/_2$. La gráfica es cóncava hacia abajo para $x<{}^3/_2$ y cóncava hacia arriba si $x>{}^3/_2$. (Véase la parte (b) de la Fig. 16) Las coordenadas del punto en que la concavidad cambia están dadas por $x={}^3/_2$, $y={}^5/_2$.

Combinando la información de las partes (a) y (b), podemos resumirla como se advierte en la parte (c) de la figura 16; esto es, si $x<1$, $f(x)$ es creciente y cóncava hacia abajo; cuando $1<x<{}^3/_2$, $f(x)$ decrece y es cóncava hacia abajo; etcétera.

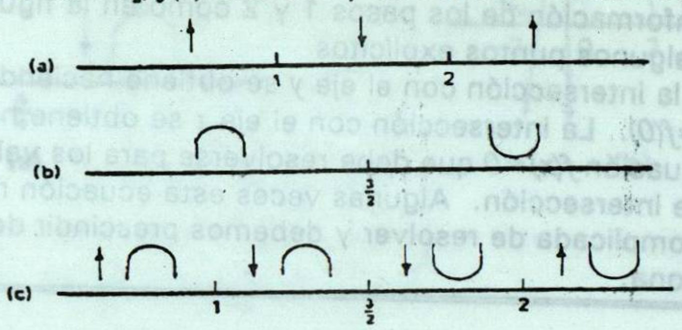

Fig. 16