Por último calculamos las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje y. Si $x=0$, $y=-2$, de modo que el punto es (0,-2).

A fin de bosquejar la gráfica, graficamos primero los puntos (1,3), $(^3/_2, ^5/_2)$, (2,2) en donde f(x) cambia su naturaleza (de creciente a decreciente o de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo) y el punto (0,-2) en que la gráfica corta el eje y. Entonces usando la información de la figura 16, dibujamos curvas del tipo apropiado que unan a estos puntos. Esto da la gráfica como se aprecia en la figura 17.

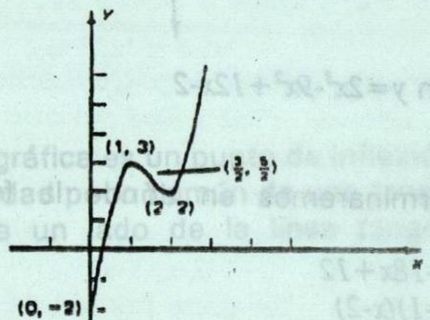

Fig. 17

Los pasos necesarios en el bosquejo de la gráfica de una función polinomial pueden resumirse en el procedimiento siguiente:

Paso 1: Calcula $f'(x)$
Determina los intervalos en que $f'(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ crece o decrece, respectivamente. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen estos intervalos.
Paso 2: Calcula $f''(x)$
Determina los intervalos en que $f''(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Calcula las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos.
Paso 3: Combina
Combina la información de los pasos 1 y 2 como en la figura 16.
Paso 4: Encuentra algunos puntos explícitos
Por ejemplo, la intersección con el eje y se obtiene haciendo $x=0$, de modo que $y=f(0)$. La intersección con el eje x se obtiene haciendo $y=0$. Esto da la ecuación $f(x)=0$ que debe resolverse para los valores de x en los puntos de intersección. Algunas veces esta ecuación resulta ser demasiado complicada de resolver y debemos prescindir de la información que proporciona.

Ejemplo 2
Bosqueja la gráfica de $y=3+5x-2x^2$

Solución
Paso 1

$$y'=5-4x$$

Así que, $y'>0$ si $x<^5/_4$ y $y'<0$ cuando $x>^5/_4$. Si $x=^5/_4$,

$$y = 3+5(^5/_4)-2(^5/_4)^2 = ^{49}/_8$$

En consecuencia, la gráfica es creciente si $x<^5/_4$ y decreciente para $x>^5/_4$, y el punto divisorio de la gráfica es $(^5/_4, ^{49}/_8)$

Paso 2
$y''=-4$.
Así que la gráfica es cóncava hacia abajo para toda x.

Paso 3
Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 18 (a).

Paso 4
Cuando $x=0$, $y=3$ lo que da el punto (0,3). Si $y=0$ obtenemos la ecuación $2x^2-5x-3=0$. Esta función cuadrática puede factorizarse: $(2x+1)(x-3)=0$, y las raíces son $x=-½$ y $x=3$. En consecuencia, la gráfica corta al eje x en (-½,0) y (3,0).

Integrando toda esta información, podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso de la gráfica, como se observa en la figura 18 (b).

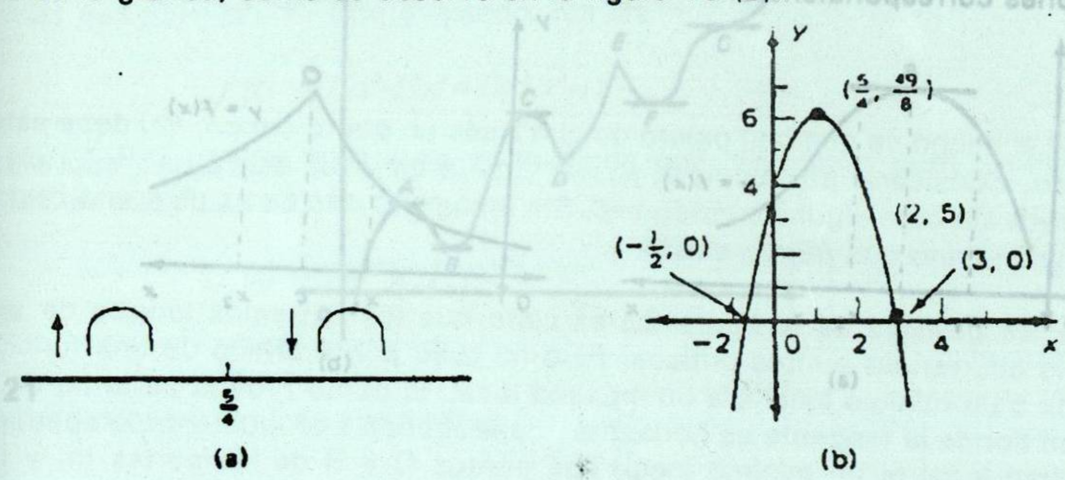

Fig. 18

Bosqueje las gráficas de las funciones siguientes

1. $y = x^2 - 6x + 7$
2. $y = x^2 - 4x + 5$
3. $y = x^3 - 3x + 4$
4. $y = x^3 - 12x + 10$
5. $y = x^3 - 3x + 2$
6. $y = 2x^3 - 9x - 24x + 20$
7. $y = x^4 - 2x^2$
8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
9. $y = x^2 - 5x + 1$
10. $y = x^4 - 7x^3$
11. $y = 5x^3 - 6x^2 + 1$
12. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

4.3 Puntos Críticos

Definiciones

a) Una función $f(x)$ se dice que tiene un máximo local en $x=c$ si $f(c)>f(x)$ para cada x lo suficientemente cerca de c.

Así, los puntos P y Q en las gráficas de la figura 19 corresponden a máximos locales de las funciones correspondientes.

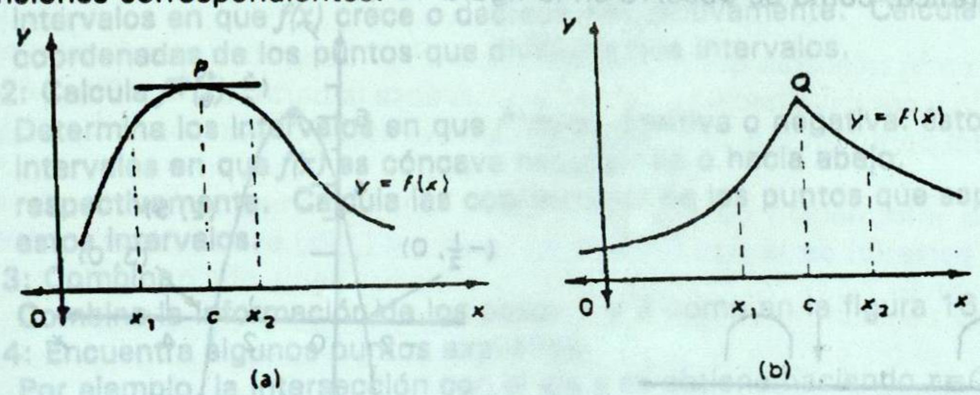

Fig. 19

b) Una función $f(x)$ se dice que tiene un mínimo local en $x=c$ si $f(c)<f(x)$ para cada x suficientemente cerca de c.

Los puntos A y b en las gráficas de la figura 20 corresponden a mínimos locales.

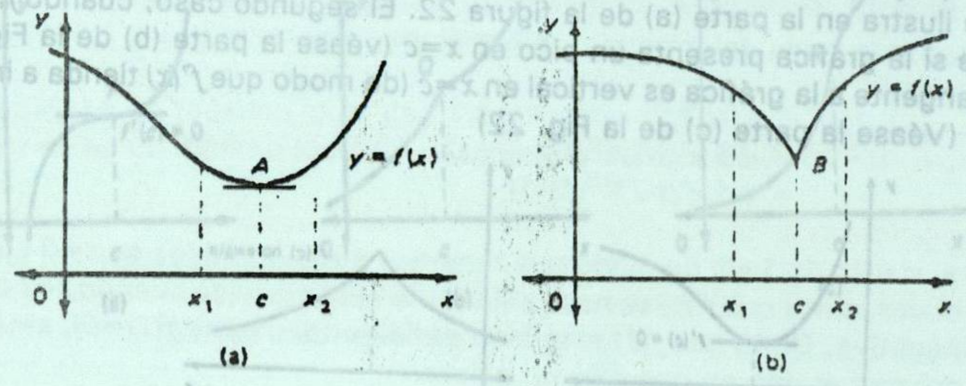

Fig. 20

c) El término extremo se utiliza para indicar un máximo local o un mínimo local.

Una función puede tener más de un máximo local y más de un mínimo local, como se aprecia en la figura 21. Los puntos A, C y E de la gráfica corresponden a puntos en que la función tiene máximos locales.

Un valor *máximo* o *mínimo* (local) de una función es la coordenada y del punto en que la gráfica tiene un máximo o mínimo local. Un valor mínimo local puede ser mayor que un valor máximo local. Esto puede advertirse de inmediato en la parte superior de la gráfica, en donde la coordenada y de F es mayor que la correspondiente a A.

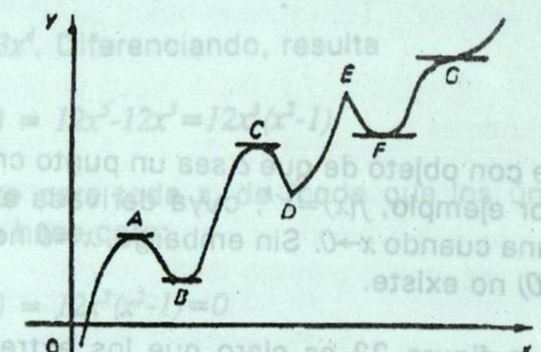

Fig. 21

Definición

El valor $x=c$ se denomina un punto crítico de una función continua f si $f(c)$ está bien definido y si $f'(c)=0$ o $f'(x)$ no existe en $x=c$.

En el caso en que $f'(c)=0$, la tangente a la gráfica de $y=f(x)$ es horizontal en $x=c$. Esta posibilidad se ilustra en la parte (a) de la figura 22. El segundo caso, cuando $f'(c)$ no existe, ocurre si la gráfica presenta un pico en $x=c$ (véase la parte (b) de la Fig. 22) o cuando la tangente a la gráfica es vertical en $x=c$ (de modo que $f'(x)$ tienda a infinito cuando $x \to c$). (Véase la parte (c) de la Fig. 22)

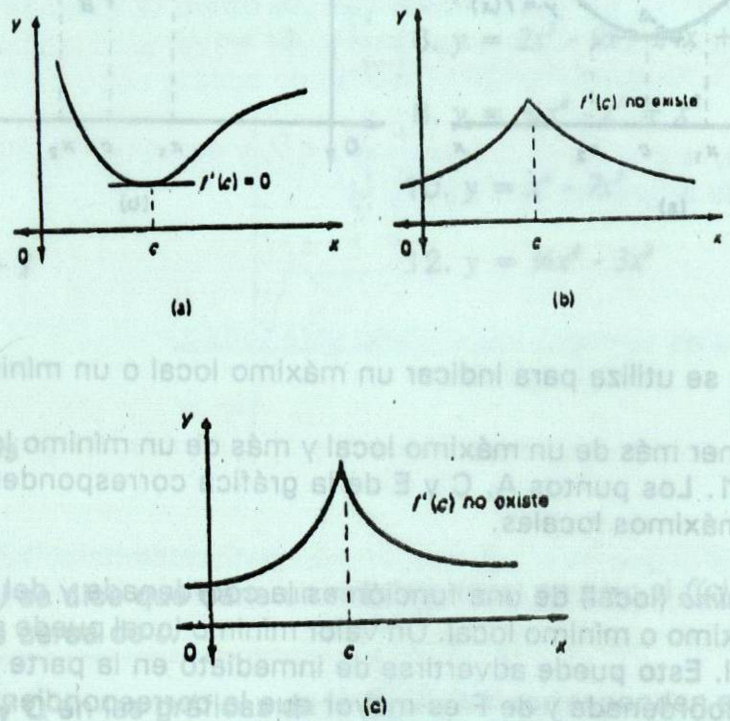

Fig. 22

Enfatizamos el hecho de que con objeto de que c sea un punto crítico, $f(c)$ debe estar bien definido. Considere, por ejemplo, $f(x)=x^{-1}$, cuya derivada es $f'(x)=-x^{-2}$. Es claro que, $f'(x)$ crece sin cota alguna cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x=0$ no es un punto critico de esta función dado que $f(0)$ no existe.

A partir de las gráficas de la figura 22 es claro que los extremos locales de una función sólo ocurren en puntos críticos. Pero no todo punto crítico de una función corresponde a un mínimo local o a un máximo local. El punto P de la parte (a) de la figura 23 en donde la tangente es horizontal, corresponde a un punto crítico pero no es un máximo local ni un mínimo local. Los puntos Q y R de las partes (b) y (c) corresponden a puntos críticos en que $f'(c)$ no existe, pero no son extremos de $f(x)$. De hecho, P y R son puntos de inflexión.

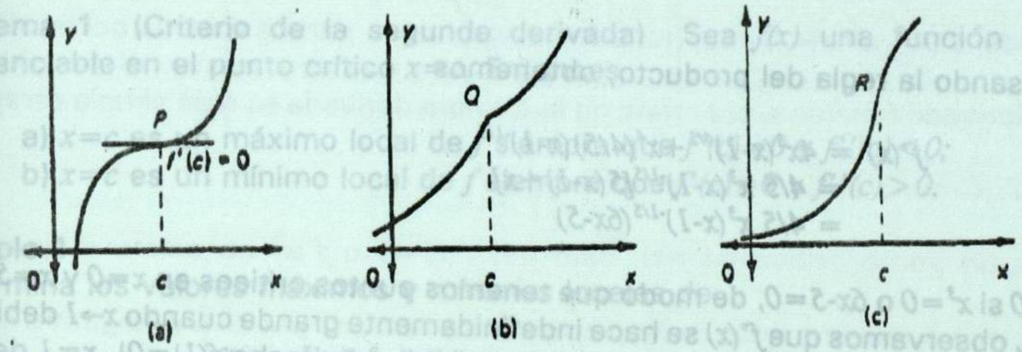

Fig. 23

En la próxima sección, desarrollaremos ciertos criterios que nos permitirán distinguir aquellos puntos críticos que son extremos locales de aquellos que no lo son. Primero examinaremos puntos críticos por sí mismos a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Determina los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3(2x^3-3x)$$

Solución

Tenemos que $f(x)=2x^6-3x^4$. Diferenciando, resulta

$$f'(x) = 12x^5-12x^3=12x^3(x^2-1)$$

Es claro que $f'(x)$ existe para toda x, de modo que los únicos puntos críticos son aquellos en que $f'(x)$ se hace cero:

$$f'(x) = 12x^3(x^2-1)=0$$

o bien

$$x^3=0 \text{ o } x^2-1=0$$

Así que los puntos críticos son $x=0$, ± 1.

Ejemplo 2

Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x)=x^4(x-1)^{4/5}$$

Solución

Derivando, usando la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(x-1)^{4/5}+x^4(4/5)(x-1)^{-1/5} \\ &= 4/5\, x^3(x-1)^{-1/5}[5(x-1)+x] \\ &= 4/5\, x^3(x-1)^{-1/5}(6x-5) \end{aligned}$$

Ahora $f'(x)=0$ si $x^3=0$ o $6x-5=0$, de modo que tenemos puntos críticos en $x=0$ y $x=5/6$. Sin embargo, observamos que $f'(x)$ se hace indefinidamente grande cuando $x \to 1$ debido a la potencia negativa. Dado que $f(1)$ está bien definido (de hecho $f(1)=0$), $x=1$ debe ser un punto crítico del tipo en que $f'(x)$ no existe.

Ejercicio 4.3

Determina los puntos críticos de las funciones siguientes.

1. $2x^2+8x+1$
2. $4-x-3x^2$
3. x^3-3x
4. $2x^3-6x$
5. x^3+3x^2+1
6. $2x^3-3x^2-36x+1$
7. $x^3-9x^2+24x+2$
8. x^4-2x^2
9. x^4-4x^3
10. $x+x^{-1}$

4.4 Criterios para Extremos Locales

Hemos visto que los extermos locales de una función se encuentran entre sus puntos críticos. Describiremos ahora los dos criterios que se usan con objeto de decidir si un punto crítico dado es o no un máximo o mínimo local.

Consideremos primero el caso en que el extremo local coincide con un punto crítico dado por $f'(x)=0$, esto es, cuando la línea tangente es horizontal en el punto de la gráfica de f que corresponde al extremo. Entonces si el punto es un máximo local, la gráfica es cóncava hacia abajo, y si el punto es un mínimo local, la gráfica es cóncava hacia arriba. Pero sabemos que siempre que $f''(x)<0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo y siempre que $f''(x)>0$, la gráfica es cóncava hacia arriba. Esto nos lleva al teorema siguiente.

Teorema 1 (Criterio de la segunda derivada) Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable en el punto crítico $x=c$. Entonces

a) $x=c$ es un máximo local de f siempre que $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$;
b) $x=c$ es un mínimo local de f siempre que $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$.

Ejemplo 1
Determina los valores máximos y mínimos locales de

$$f(x)=x^3+2x^2-4x-8$$

Si $f(x)=x^3+2x^2-4x-8$. Entonces,

$$f'(x)=3x^2+4x-4$$

A fin de encontrar los puntos críticos, hacemos $f'(x)=0$

$$3x^2+4x-4=0$$
$$(3x-2)(x+2)=0$$

Esto da $x=2/3$ ó -2. Ahora $f''(x)=6x+4$. Si $x=2/3$,

$$f''(2/3) = 6(2/3)+4 = 8>0$$

De aquí, puesto que $f''(x)$ es positiva en $x=2/3$, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=2/3$. EL valor mínimo local está dado por

$$f(2/3) = (2/3)^3 + 2(2/3)^2 - 4(2/3) - 8 = -\tfrac{256}{27}$$

Cuando $x=-2$, $f''(-2) = 6(-2) + 4 = -8<0$. En consecuencia, dado que $f''(x)$ es negativa cuando $x=-2$, $f(x)$ tiene un máximo local si $x=-2$. El valor máximo local está dado por

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$$

Así, el único valor máximo local de $f(x)$ es 0, y ocurre cuando $x=-2$; el único valor mínimo local es $-\tfrac{256}{27}$, y ocurre cuando $x=2/3$.

Observe que el ejemplo 1, $f'(x)$ está bien definida para todos los valores de x, así que los únicos puntos críticos son aquellos en que $f'(x)$ es cero.

El criterio de la segunda derivada puede utilizarse en todos los extremos locales en que $f'(c)=0$ y $f''(c)$ no es cero. Si $f''(x)=0$ en un punto crítico $x=c$, o si $f''(c)$ no existe, entonces el criterio de la segunda derivada no puede aplicarse a fin de decidir si $x=c$ es un punto máximo o mínimo local. En tales casos, podemos recurrir a un criterio diferente, denominado el criterio de la primera derivada para extremos locales.

El criterio de la primera derivada también se emplea en puntos críticos del tipo en que $f'(c)$ no existe. Sucede también en algunos casos que aun cuando el criterio de la segunda derivada funciona, el criterio de la primera derivada es más simple de aplicar.

Teorema 2 (Criterio de la primera derivada)

Si $x=c$ es un punto crítico de $f(x)$, esto es, $f'(c)=0$ o $f'(x)$ no existe cuando $x \to c$, entonces:

a) $x=c$ es un máximo local de f si $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (a) de la figura 24. El (+), (-) o (0) entre paréntesis de la figura indica el signo de la pendiente a la gráfica en los puntos dados.)

b) $x=c$ es un mínimo local de f si $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (b) de la Fig. 24.)

c) $x=c$ no es un extremo local si $f'(x)$ no cambia de signo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (c) de la Fig. 24.) En tales casos, $x=c$ será un punto de inflexión o presentará un pico en la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 2

Determina los extremos locales de $f(x)=x^4-4x^3+7$

Solución

En este caso $f'(x) = 4x^3-12x^2 = 4x^2(x-3)$

En un punto crítico, $f'(x)=0$ ó $4x^2(x-3)=0$, es decir, $x=0$ o $x=3$.

Ahora $f''(x)=12x^2-24x$.

En $x=3$. $f''(3) = 12(9)-24(3) = 108-72 = 36>0$. En consecuencia, $x=3$ es un punto mínimo local de $f(x)$.

En $x=0$, $f''(0)=0$. Así que no podemos usar el críterio de la segunda derivada con objeto de determinar la naturaleza del punto crítico $x=0$. Para ello, debemos recurrir al criterio de la primera derivada.

En primer término, sea x estrictamente menor que el punto crítico $x=0$, esto es, sea x negativo pero pequeño. Entonces $x^2 > 0$ y $x-3 < 0$. Por tanto $f'(x) = 4x^2(x-3)<0$, dado que es el producto de un número positivo ($4x^2$) y un número negativo ($x-3$). En segundo lugar, consideremos una x estrictamente mayor que le punto crítico $x=0$, es decir, tomamos x pequeño y positivo. Se sigue que $x^2 > 0$ y $x-3<0$, de modo que $f'(x)=4x^2(x-3)<0$. Por consiguiente, $f'(x)$ es negativa tanto para valores de x a la derecha del punto $x=0$ como en el caso de valores a la izquierda de tal valor y no cambia de signo cuando x se incrementa alrededor del valor 0. En consecuencia, $x=0$ ni es máximo ni es mínimo (en realida es un punto de inflexión).

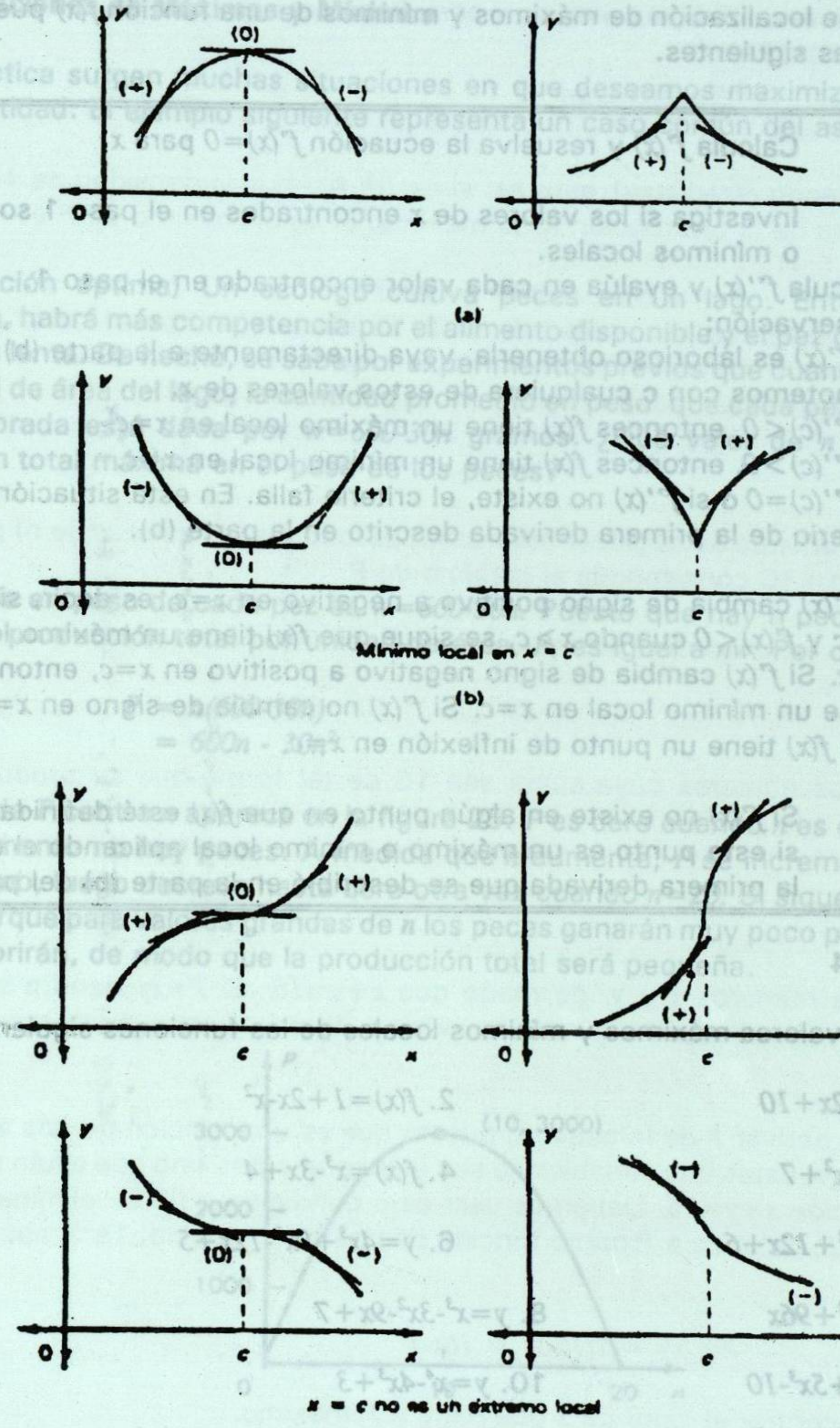

Fig. 24

El método de localización de máximos y mínimos de una función $f(x)$ puede resumirse en las etapas siguientes.

Paso 1 Calcula $f'(x)$ y resuelva la ecuación $f'(x)=0$ para x.

Paso 2 Investiga si los valores de x encontrados en el paso 1 son máximos o mínimos locales.

a) Calcula $f''(x)$ y evalúa en cada valor encontrado en el paso 1.
Observación:
si $f''(x)$ es laborioso obtenerla, vaya directamente a la parte (b).
Denotemos con c cualquiera de estos valores de x.
Si $f''(c)<0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x=c$.
Si $f''(c)>0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=c$.
Si $f''(c)=0$ o si $f''(x)$ no existe, el criterio falla. En está situación usa el criterio de la primera derivada descrito en la parte (b).

O bien:

b) Si $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo en $x=c$, es decir, si $f'(x)>0$ si $x<c$ y $f'(x)<0$ cuando $x>c$, se sigue que $f(x)$ tiene un máximo local en $x=c$. Si $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo en $x=c$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=c$. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x=c$, se sigue que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=c$.

Paso 3 Si $f'(x)$ no existe en algún punto en que $f(x)$ esté definida, examine si este punto es un máximo o mínimo local aplicando el criterio de la primera derivada que se describió en la parte (b) del paso 2.

Ejercicio 4.4

Calcula los valores máximos y mínimos locales de las funciones siguientes.

1. $f(x)=x^2-12x+10$
2. $f(x)=1+2x-x^2$
3. $f(x)=x^3-6x^2+7$
4. $f(x)=x^3-3x+4$
5. $y=2x^3-9x^2+12x+6$
6. $y=4x^3+9x^2-12x+5$
7. $y=x^3-18x^2+96x$
8. $y=x^3-3x^2-9x+7$
9. $y=x^5-5x^4+5x^3-10$
10. $y=x^4-4x^3+3$

4.5 Aplicaciones de Máximos y Mínimos

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El ejemplo siguiente representa un caso común del asunto.

Ejemplo 1

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w=600-30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución

La ganancia en peso de cada pez es $w=600-30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente.

$$P = n(600-30n) = 600n - 30n^2$$

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero dado que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n=20$. Si sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña.

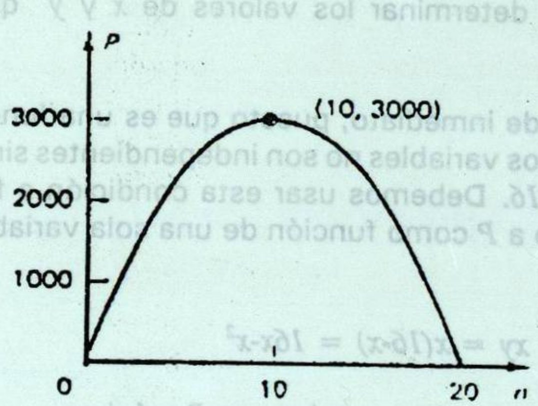

Fig. 25