4.5 Aplicaciones de Máximos y Mínimos

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El ejemplo siguiente representa un caso común del asunto.

Ejemplo 1

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces **introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay** n **peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por** $w=600-30n$ **gramos.** ¿Qué valor de n conduce a la **producción total máxima en el peso de los peces?**

Solución

La ganancia en peso de cada pez es $w=600-30n$. Puesto que hay n peces por unidad **de área, la producción total** por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente.

$$P = n(600-30n)$$
$$= 600n - 30n^2$$

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero dado que **en ese momento** no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un **valor máximo,** luego decrece hasta cero otra vez cuando $n=20$. Si sigue creciendo, P **decrece porque** para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos **de ellos morirán,** de modo que la producción total será pequeña.

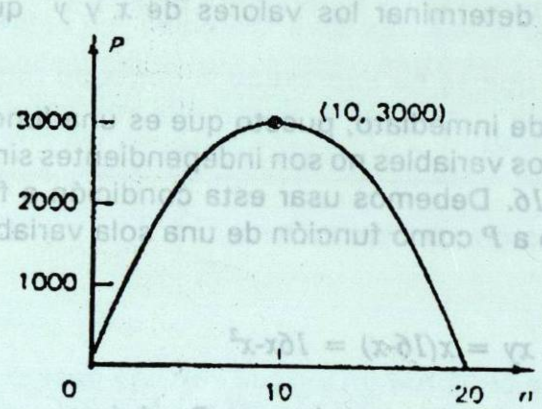

Fig. 25

Con objeto de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn.

$$\frac{dP}{dn}=600-60n$$

y $dP/dn=0$ cuando $600-60n=0$, esto es, si $n=10$. Así que la densidad de 10 peces por **unidad de área da la producción total máxima.** El valor máximo de P es

$$P = 600(10)-30(10)^2 = 3000$$

es decir 3000 gramos por unidad de área. Es obvio que a partir de la gráfica de P como una función de n que el valor $n=10$ **corresponde al máximo de P. Sin embargo, podemos verificarlo usando la regla de la segunda derivada.**

$$\frac{d^2P}{dn^2}=-60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico n = 10 corresponde al máximo de P.

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

Ejemplo 2

Determina dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución

Sean los dos números x y y, de modo que $x+y=16$. Si $P=xy$ denota su producto, **entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.**

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición $x+y=16$. **Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable.** Tenemos que $y=16-x$, **y así**

$$P= xy = x(16-x) = 16x-x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx}=16-2x$$

Con objeto de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn.

$$\frac{dP}{dn}=600-60n$$

y $dP/dn=0$ cuando $600\text{-}60n=0$, esto es, si $n=10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$P = 600(10)\text{-}30(10)^2 = 3000$$

es decir 3000 gramos por unidad de área. Es obvio que a partir de la gráfica de P como una función de n que el valor $n=10$ corresponde al máximo de P. Sin embargo, podemos verificarlo usando la regla de la segunda derivada.

$$\frac{d^2P}{dn^2}=-60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico n = 10 corresponde al máximo de P.

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

Ejemplo 2

Determina dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución

Sean los dos números x y y, de modo que $x+y=16$. Si $P=xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición $x+y=16$. Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y=16\text{-}x$, y así

$$P= xy = x(16\text{-}x) = 16x\text{-}x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx}=16-2x$$

Así que, $dP/dx=0$ cuando $16\text{-}2x=0$, esto es, si $x=8$. La segunda derivada $d^2P/dx^2= -2<0$, y $x=8$ corresponde a un máximo de P.

Cuando $x=8$, también $y=8$, de modo que el valor máximo de P es igual a 64.

La solución de problemas de optimización del tipo anterior con frecuencia se encuentra que es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir el problema dado en palabras en ecuaciones. Una vez que las ecuaciónes se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras en términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo a fin de que sean de utilidad.

Por desgracia, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal pueda reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que conviene tener en mente.

Paso 1	Identifica todas las variables involuradas en el problema y denota cada una de ellas mediante un símbolo. En el ejemplo 1, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganacia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de peces por unidad de área. En el ejemplo 2, las variables eran los dos números x y y , y P, su producto.
Paso 2	Destaca la variable que ha de ser maximizada o minimizada y exprésela en términos de las otras variables del problema. Volviendo al ejemplo 1, la producción total P se maximizó, y escribimos $P=nw$, que expresa a P en términos de n y w. En el ejemplo 2, el producto P de x y y se maximizó y por supuesto $P=xy$.
Paso 3	Detremina todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente. En el primer ejemplo, se daba la relación $w=600-3n$. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática $x+y=16$.
Paso 4	Expresa la cantidad por maximizar o minimizar en términos de las otras variables. Con objeto de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 a fin de eliminar todas excepto una de las variables. Recurriendo de nuevo al ejemplo 1, teníamos que $P=nw$ y $w=600-3n$, de modo que, sustituyendo w, se obtiene P en términos de n: $P=n(600-3n)$. En el ejemplo 2, tenemos que $P=xy$ y $x+y=16$, por lo que, sustituyendo y obtenemos $P=x(16-x)$.
Paso 5	Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determina sus puntos críticos e investiga si son máximos o mínimos locales.

Seguiremos estos pasos en otro ejemplo.

Ejemplo 3

(Costo mínimo) Se ha de construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque debe tener una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1 Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados, los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (Véase la Fig. 26.) La cantidad que debe minimizarse es el costo total de material, que denotamos con C.

Paso 2 C es igual al área del tanque multiplicada por \$10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x y y, y tiene un área de xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto x^2+4xy. En consecuencia, escribimos

$$C=10(x^2+4xy)$$

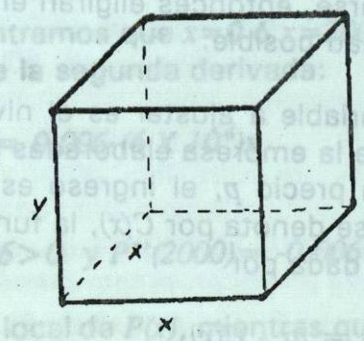

Fig. 26

Paso 3 Observa que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y a fin de eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento (establecido en el problema) de que el volumen del tanque debe ser de 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición

$$x^2y=4$$

Paso 4 Por el paso 3, $y = 4/x^2$, y así

$$C = 10\ [x^2+4x(4/x^2)] = 10\ [x^2+16/x]$$

Paso 5 Podemos derivar la última expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx}=10\left(2x-\frac{16}{x^2}\right)=20\left(x-\frac{8}{x^2}\right)=0$$

Así, $x -8/x^2=0$ y por tanto $x^3=8$; es decir, $x=2$.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque es ahora dada por

$$y = 4/x^2 = 4/(2)^2 = 1$$

Es fácil verificar que $d^2\, C/dx^2>0$ cuando $x=2$, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de máximos y mínimos es a las operaciones de empresas comerciales. Esto ocurre por una razón simple, es decir que una empresa selecciona su estrategia y nivel de operación en tal forma que maximice su utilidad. Así pues, si la administración de la empresa sabe cómo depende la utilidad de alguna variable que puede ajustarse, entonces eligirán el valor de tal variable de modo que produzca la máxima utilidad posible.

Consideremos el caso en que la variable a ajustar es el nivel de producción, x (el número de unidades del producto de la empresa elaboradas por semana o por mes). Si cada una unidad se vende a un precio p, el ingreso es $R(x)=p(x)$. El costo de producir x artículos depende de x y se denota por $C(x)$, la función de costo. Se sigue que la utilidada es una función de x dada por

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Deseamos elegir el valor de x que haga a P máxima.

En primer término abordemos el caso en que una pequeña empresa vende su producto en un mercado de libre competencia. En esta situación, el volumen de ventas x de esta empresa particular no afectará el precio del mercado para el artículo en cuestión. Podemos suponer que el precio p es constante, independiente de x, determinado por fuerzas económicas fuera de control de nuestra pequeña empresa. El ejemplo siguiente ilustra un problema de esta clase.

Ejemplo 4

(Maximización de utilidades) Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de \$6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000+6x-0.003x^2+10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución

El ingreso producido por la venta de x artículos a \$6 cada uno es $R(x)=6x$ dólares. Por consiguiente, la utilidad por semana es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x) \\ &= 6x-(1000+6x-0.003x^2+10^{-6}x^3) \\ &= -1000+0.003x^2-10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

A fin de encontrar el valor máximo de P, buscamos los puntos criticos en la forma usual y luego investigamos su naturaleza. Derivando obtenemos

$$P'(x)=0.006x-(3 \text{ X } 10^{-6})x^2$$

y haciendo $P'(x)=0$, encontramos que $x=0$ ó $x=2000$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada:

$$P''(x) = 0.006-(6 \text{ X } 10^{-6})x$$

de modo que

$$P''(0) = 0.006>0 \text{ y } P''(2000)= -0.006<0$$

Así que $x=0$ es un mínimo local de $P(x)$, mientras que $x=2000$ es un máximo local. Este último valor representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. Este valor está dado por

$$\begin{aligned} P(2000) &= -1000+0.003(2000)^2-10^{-6}(2000)^3 \\ &= 3000 \end{aligned}$$

o \$3000 por semana.

Ejercicio 4.5

1. (Teoría de números) Determina dos números cuya suma sea 10 tales que su producto sea máximo.

2. (Teoría de números) Encuentra dos números con suma igual a 8, de modo que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

3. (Teoría de números) Determina dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.

4. (Teoría de números) Determina dos números positivos con suma igual a 12 de modo que la suma de sus cubos sea un mínimo.

5. (Geometría) Demuestra que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. (Costo de cercas) Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de \$15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a \$20?

7. (Costos de cercas) Repite el ejercicio 6 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

8. (Diseño de un folleto impreso) Un folleto impreso ha de contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

9. (Diseño de una cisterna) Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determina las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

10. (Diseño de una cisterna) Repite el ejercicio 9 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

11. (Costo promedio mínimo) El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C}=5+\frac{48}{x}+3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentra el valor mínimo de $\overline{C}$

12. (Utilidad máxima) Una empresa vende todas las unidades que produce a \$4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escribe la expresión para la utilidad total P como una función de x.
b) Determina el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima
c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

CAPÍTULO 5
LA INTEGRAL

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina cálculo diferencial. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado cálculo integral, en que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). A fin de calcular v, sólo derivamos s(t). Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad v(t) y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y buscamos la función s(t), una etapa opuesta a la diferenciación. Por ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto período.