5. (Geometría) Demuestra que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. (Costo de cercas) Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de \$15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a \$20?

7. (Costos de cercas) Repite el ejercicio 6 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

8. (Diseño de un folleto impreso) Un folleto impreso ha de contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

9. (Diseño de una cisterna) Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determina las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

10. (Diseño de una cisterna) Repite el ejercicio 9 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

11. (Costo promedio mínimo) El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C}=5+\frac{48}{x}+3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentra el valor mínimo de $\overline{C}$

12. (Utilidad máxima) Una empresa vende todas las unidades que produce a \$4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escribe la expresión para la utilidad total P como una función de x.
b) Determina el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima
c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

CAPÍTULO 5
LA INTEGRAL

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina cálculo diferencial. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado cálculo integral, en que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). A fin de calcular v, sólo derivamos s(t). Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad v(t) y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y buscamos la función s(t), una etapa opuesta a la diferenciación. Por ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto período.

5.1 Antiderivadas

El proceso de determinar la función cuando se conoce su derivada se llama integración, y la función a determinar se denomina la antiderivada o la integral de la función dada.

Con objeto de evaluar la antiderivada de alguna función $f(x)$, debemos encontrar una función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$. Por ejemplo, supongamos que $f(x)=2x$. Puesto que sabemos que $d/dx\,(x^2)=2x$, concluimos que podemos elegir $F(x)=x^2$. En consecuencia, una antiderivada de $2x$ es x^2.

Sin embargo, debe observarse que esta respuesta no es única, porque las funciones x^2+1, x^2-3 y $x^2+½$ todas tienen a $2x$ como derivada. De hecho, para cualquier constante C, x^2+C tiene derivada $2x$; en consecuencia, x^2+C es una antiderivada de $2x$ para cualquier C. La constante C, que puede tener un valor arbitrario, se conoce como la constante de integración.

El hecho de que no sean únicas es común a todas las antiderivadas. Cualquier constante puede sumarse a una antiderivada sin alterar la propuesta de ser la antiderivada de una función dada. Sin embargo, ésta no es la única ambigüedad que existe: si $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces cualquier otra antiderivada de $f(x)$ difiere de $F(x)$ sólo por una constante. Por tanto, podemos decir que si $F'(x)=f(x)$, entonces la antiderivada general de $f(x)$ está dada por $F(x)+C$, en donde C es cualquier constante.

Dado que la constante de integración es arbitraria (es decir, puede ser cualquier número real), la integral así obtenida recibe el nombre más propio de integral indefinida. Algunas veces diversos métodos de evaluar una integral pueden dar la respuesta en diferentes formas, pero siempre se dará el caso en que las dos respuestas sólo difieren por una constante.

Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Escribimos esta afirmación en la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

que se lee como la integral de $f(x)$, dx, es igual a $F(x)+C$. La función $f(x)$ por integrar se denomina el integrando y el símbolo $\int$ es el signo de integral. El símbolo

$$\int .....dx$$

indica la integral, con respecto a x, de .... Es el inverso del símbolo

$$\frac{d}{dx}...$$

que significa derivada, con respecto a x, de.... El signo de integral y dx van juntos. El signo de integral indica la operación de integración y dx especifica que la variable de integración es x. El integrando siempre se coloca entre el signo de integral y la diferencial de la variable de integración.

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int 2x\,dx = x^2+C$$

A partir de la definición de integral, es claro que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)}$$

Esto es, el proceso de diferenciación neutraliza el efecto del proceso de integración.

Estableceremos un número de fórmulas de integración simple y estándar. La primera de éstas se conoce como fórmula de la potencia; nos indica cómo integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de x.

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n\neq -1) \quad \textit{(Fórmula de la potencia)}}$$

Así, se quiere integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de la primera potencia, debemos aumentar la potencia en 1, luego dividimos entre el nuevo exponente y, por último, sumamos la constante de integración arbitraria.

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula correspondiente para derivadas. Observemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right)$$

En consecuencia, dado que la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n, una antiderivada de x^n debe ser $x^{n+1}/(n+1)$. La antiderivada general se obtiene sumando la constante de integración.

Ejemplo 1

(a) $\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + C = \dfrac{x^4}{4} + C$ $\quad (n=3)$

(b) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C$ $\quad (n=-2)$

$= -\dfrac{1}{x} + C$

(c) $\int \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \dfrac{t^{-1/2+1}}{(-½+1)} + C = 2\sqrt{t} + C$ $\quad (n=-½)$

(d) $\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$ $\quad (n=0)$

Ahora probamos dos teoremas que simplificarán el álgebra de integración.

TEOREMA 1 La integral del producto de una constante de una función de x es igual a la constante por la integral de la función. Esto es, si c es una constante.

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

Ejemplo 2

(a) $\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

(b) $\int 2x^3\, dx = 2\int x^3\, dx = \frac{2x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C$

(c) $\int 5\, dx = 5\int 1\, dx = 5x + C$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\, dx\right] = c\,\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = cf(x)$$

Por consiguiente, $c\, f(x)$ es la derivada de $c \int f(x)dx$, y así a partir de la definición de antiderivada, se sigue que $c \int f(x)dx$ debe ser la antiderivada de $c\, f(x)$. En otras palabras,

$$\int c\, f(x)\, dx = c\int f(x)\, dx$$

que prueba el resultado.

Como resultado de este teorema, se sigue que podemos sacar cualquier constante multiplicativa del interior del signo de integral.

Observación: Las variables no pueden sacarse del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int x\, (x^3)dx \neq x\int x^3\, dx$$

TEOREMA 2 La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Observación: Este resultado puede extenderse a la diferencia de dos funciones o cualquier suma algebraica de un número finito de funciones.

Ejemplo 3
Calcula la integral de $(x - 3/x)^2$.

Solución
Desarrollamos $(x-3/x)^2$ con objeto de expresar el integrando como una suma de funciones potencia.

$$\int\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int\left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^2\, dx - \int 6\, dx + \int 9x^{-2}\, dx$$

$$= \int x^2\, dx - 6\int 1\, dx + 9\int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6x + 9\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C$$

Ejemplo 4

Encuentra la antiderivada de

$$\frac{3 + 7t^2 + t^3}{t^2}$$

Solución

$$\int \frac{3 + 7t^2 + t^3}{t^2}\, dt = \int\left(\frac{3}{t^2} + 7 + t\right) dt$$

$$= 3\int t^{-2}\, dt + 7\int 1\, dt + \int t\, dt$$

$$= 3\,\frac{t^{-2+1}}{-1} + 7t + \frac{t^{1+1}}{2} + C$$

$$= -\frac{3}{t} + 7t + \frac{t^2}{2} + C$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] + \frac{d}{dx}\left[\int g(x)\, dx\right]$$

$$= f(x) + g(x)$$

En consecuencia, $f(x) + g(x)$ es la derivada de $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, y así por la definición de antiderivada,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Ejemplo 5

(Costo extra de producción) Una compañía actualmente produce 150 unidades por semana de producto. Por experiencia, saben que el costo de producir la unidad número x en una semana (esto es, el costo marginal) está dado por

$$C'(x) = 25 - 0.02x$$

Suponiendo que este costo marginal aún se aplica, determina el costo extra por semana que debería considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

Solución

El costo marginal es la derivada de la función de costo. En consecuencia, la función de costo se obtiene integrando la función de costo marginal.

$$C(x) = \int C'(x)\,dx$$
$$= \int (25 - 0.02x)\,dx$$
$$= 25x - (0.02)\frac{x^2}{2} + K = 25x - 0.01x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. No tenemos la información suficiente con objeto de determinar el valor de K. Sin embargo, deseamos calcular el incremento en el costo que resulta de elevar x de 150 a 200 (esto es, C(200) - C(150)).

$$C(200) = 25(200) - 0.01(200)^2 + K = 4600 + K$$
$$C(150) = 25(150) - 0.01(150)^2 + K = 3525 + K$$

por consiguiente,

$$C(200) - C(150) = (4600 + K) - (3525 + K) = 1075$$

El incremento en el costo semanal sería por tanto \$1075. Nótese que la constante desconocida K no aparece en la respuesta final.

Ejemplo 6

(Ingreso y demanda) El ingreso marginal de una empresa está dado por

$$R'(x) = 15 - 0.01x$$

a) Determina la función de ingreso

b) Encuentra la relación de demanda para el producto de la empresa

Solución

a) La función de ingreso $R(x)$ es la integral de la función de ingreso marginal

Así que

$$R(x) = \int R'(x)\,dx = \int (15 - 0.01x)\,dx$$
$$= 15x - 0.01\frac{x^2}{2} + K = 15x - 0.005x^2 + K$$

en donde K es la constante de integración. A fin de determinar K, usamos el hecho de que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $x=0$, $R=0$. Haciendo $x=0$ y $R=0$ en nuestra expresión de $R(x)$, obtenemos

$$0 = 15(0) - 0.005(0^2) + K$$

lo que da $K=0$. Por consiguiente, la función de ingreso es

$$R(x) = 15x - 0.005x^2$$

b) Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio p, se sigue que el ingreso obtenido por la venta de x artículos está dado por $R = px$.

Así que

$$px = 15x - 0.005x^2$$

o bien

$$p = 15 - 0.005x$$

que es la relación de demanda requerida.

Ejercicio 5-1

Determina las integrales de las funciones siguientes.

1. x^7
2. $\sqrt[3]{x}$
3. $1/x^3$
4. $1/\sqrt{x}$
5. $7x$
6. $2x^4$
7. $8/x^5$
8. x^2-2x-3
9. x^3-8
10. $3x + 3/x^2$

11. $8/x^2 + x^2/8$

12. $\dfrac{x^2-3x}{x}$

13. $(x-1)^2$

14. $\sqrt{3x}$

15. $(x+2)\ (x-2)$

16. ex^{e+1}

17. $x^7 + 7x^5 + 7/x^3 + 7x$

18. $7x^2 - 3x + 8 + 1/x^3 + 2/x^2$

19. $3x^2 - 5x + 7/x^2 + 2$

20. $(x-2)(2x+3)$

21. $(x+1)(3x-2)$

22. $(x+3)(2x-1)$

23. $(x+2)^2$

24. $(2x-3)^2$

25. $(x + 1/x\ )^2$

Encuentra las antiderivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes según el caso.

26. $4x^3+3x^2+2x+1+1/x^2+1/x^3$

27. $3t^4-5t^3+7$

28. $\sqrt{u}\,(u^2+3u+7)$

29. $\dfrac{2y^3+7y^2-6y}{3y}$

30. $\sqrt{x}\,(x+1)\,(2x-1)$

Evalúa las integrales siguientes.

31. $\int \dfrac{1 + 7x^2 - 2x^3}{x^2}\, dx$

32. $\int (\sqrt{2}\,y+1)^2 dy$

33. (Velocidad y distancia)
La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + \sqrt{t})^2$. Calcula la distancia recorrida en el instante t.

34. (Aceleración)
La aceleración de un móvil en el instante t es $3 + 0.05t$.

a) Determina la velocidad en cualquier instante t si la velocidad inicial en $t=0$ es de 60 unidades.

b) Calcula la distancia recorrida por el móvil en el instante t si la distancia es cero cuando $t=0$.

35. (Costo marginal)
La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 30\text{-}0.05x$

a) Determina la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de \$2000 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

36. (Ingreso marginal)
La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 20\text{-}0.02x\text{-}0.003x^2$$

a) Encuentra la función de ingreso.

b) ¿Cuánto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

5.2 Área bajo Curvas

En esta sección y en las siguientes nos ocuparemos del cálculo de áreas de regiones que tienen fronteras curveadas. Estas pueden evaluarse usando las integrales definidas.

Definición

Sea $f(x)$ una función con una antiderivada que denotaremos por $F(x)$. Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y $F(x)$ existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces la integral definida de $f(x)$ de $x=a$ a $x=b$ se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Los números a y b se denominan los límites de integración, a es el límite inferior y b es el límite superior. Por lo regular $a<b$, pero esto no es esencial.