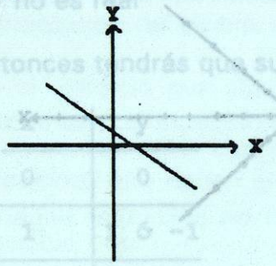
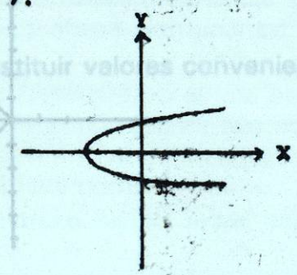
Para los problemas del 6 al 14, di si la relación graficada es o no una función.

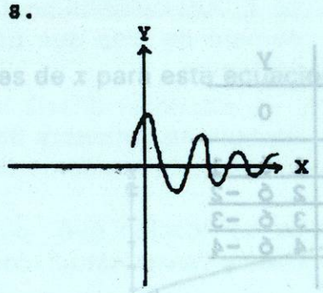
6.



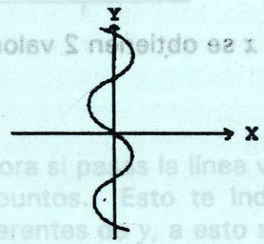
7.



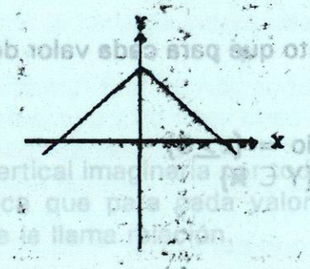
8.



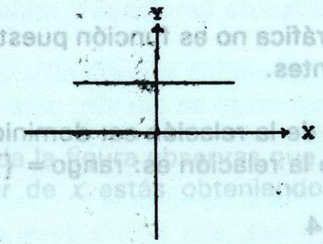
9.



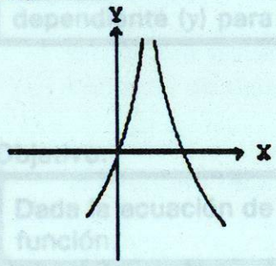
10.



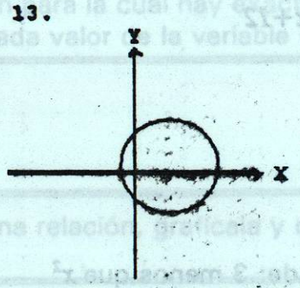
11.



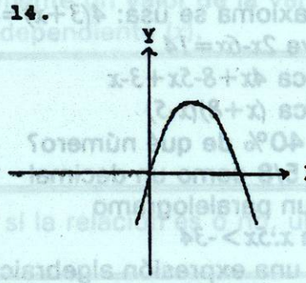
12.



13.



14.



FUNCIONES LINEALES

CAPITULO 2

Los científicos acostumbran describir algunas situaciones prácticas con ecuaciones que incluyen dos o más variables; de las ecuaciones obtienen gráficas que les permiten una mejor comprensión de estas situaciones y pueden, además, prever el comportamiento de una variable si saben cómo se comportará la otra. Pongamos el caso de un objeto que se mueve con una velocidad constante de 12 metros cada segundo; si llamamos x al tiempo transcurrido y representamos por y la distancia que separa al objeto del punto de partida en un instante x, el científico concluye que el movimiento queda descrito por la ecuación $y=12x$. Con esta ecuación se puede establecer exactamente la posición del objeto para cualquier valor permisible de x, y recíprocamente se puede determinar qué tiempo debe transcurrir para que el objeto móvil se haya desplazado una cierta distancia, así, cuando $x=5$ segundos, $y=60$ metros; también cuando el objeto se encuentra a 90 metros de su punto de partida, o sea cuando $y=90$ metros, el tiempo transcurrido $x=7.5$ segundos.

Los pares ordenados (x,y) que hacen cierta la ecuación, reciben el nombre de soluciones de la ecuación, entonces (5,60) y (7.5,90) son dos soluciones de la igualdad $y=12x$. El par ordenado (2,20) no es solución de esta ecuación, porque si $x=2$ entonces $y=24$ y $24 \neq 20$. Como x puede sustituirse por un número infinito de valores y como a cada x le corresponde una y, la ecuación anterior tiene infinitas soluciones; esto nos impide enlistarlas y para representarlas es necesario obtener su gráfica.

En el capítulo anterior aprendiste que una función relaciona dos variables. En este capítulo estudiarás una clase especial de funciones que probablemente sean las más simples y una de las más útiles, la función lineal.

2.1 Introducción a las funciones lineales

A las funciones se les nombra de acuerdo a su ecuación. Por ejemplo, si la ecuación es:

$$y=3x+5$$

entonces la función es llamada una función lineal; y se le asignó este nombre porque y es igual a un polinomio lineal en la variable x.

Definición:

> **Función Lineal**
> Una función lineal es una función cuya ecuación general es $y=mx+b$ en donde m y b son constantes, y $m \neq 0$.

La ecuación $y=mx+b$ es llamada ecuación general. Pero si son dados valores particulares para m y b, como en $y=3x+5$, entonces la ecuación es llamada ecuación particular. Si una ecuación particular tiene $m=0$, como en $y=7$, entonces y será igual a un polinomio de grado cero. Entonces la ecuación será llamada función constante, y no función lineal.

Como la gráfica de una ecuación lineal es una línea recta y una línea recta queda determinada cuando conocemos dos de sus puntos, las gráficas de estas funciones las obtendremos graficando en el plano dos de sus soluciones y trazando después la recta que los contiene.

Ejercicio 2-1

1. Selecciona valores de x y encuentra los correspondientes valores de y, grafica los puntos y traza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y=x+3$ b) $y=3x+5$
c) $y=-2x+5$ d) $y=2x-3$
e) $y=0x+3$

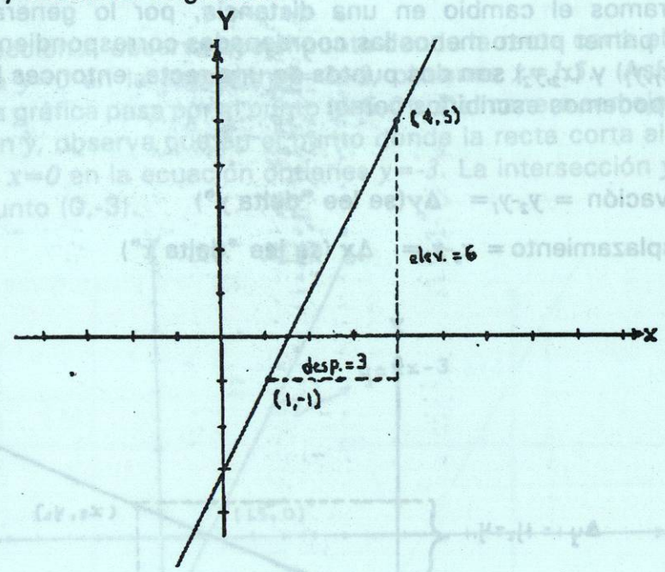
2. A partir de las gráficas anteriores, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué las funciones de primer grado son llamadas funciones lineales?
b) ¿Qué efecto sobre la gráfica produce el cambio del coeficiente de la x?
c) ¿Qué efecto sobre la gráfica produce el cambio del término constante?

2.2 Propiedades de la gráfica de una función lineal

¿Cómo se puede medir lo inclinado de una recta? Veamos cómo se realiza en la recta cuya ecuación es $y=2x-3$:

Seleccionamos dos valores de x y encontramos los correspondientes valores de y así, si $x=1$, entonces $y=-1$
si $x=4$, entonces $y=5$
graficamos los puntos y trazamos la gráfica.



La recta pasa por los puntos (1,-1) y (4,5). Entre estos puntos se "eleva" una distancia vertical de 6 unidades y se "desplaza" una distancia horizontal de 3. Se define la pendiente de una recta como sigue:

$$\text{Pendiente de una recta} = \frac{\text{cambio en la distancia vertical}}{\text{cambio en la distancia horizontal}} = \frac{6}{3} = 2$$

Una propiedad de las gráficas de las funciones lineales es que la razón

$$\frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}}$$

es constante, no importando qué pareja de puntos escojas, y es el coeficiente del término en x (m) en la ecuación $y=mx+b$.

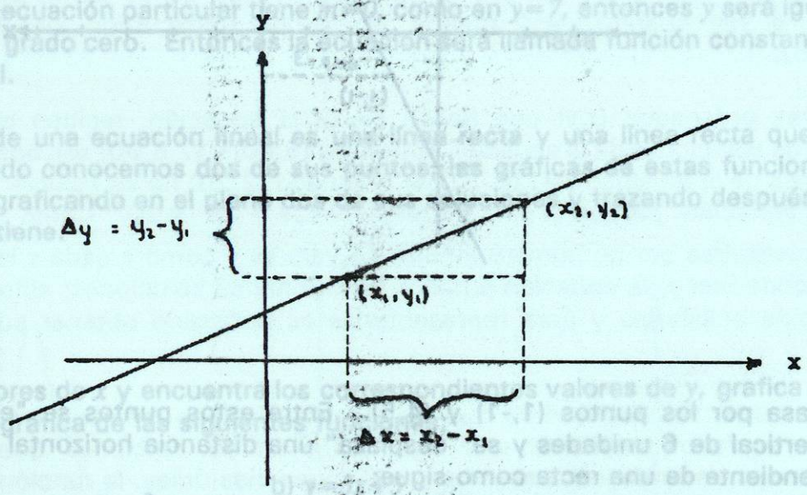
Definición:

> Pendiente
> La pendiente de una función lineal es la razón
>
> $$\frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}}$$
>
> donde el desplazamiento es la distancia horizontal entre dos puntos de la gráfica y la elevación es la distancia vertical entre los mismos puntos.

Cuando encontramos el cambio en una distancia, por lo general restamos las coordenadas del primer punto menos las coordenadas correspondientes del segundo punto. Así, si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son dos puntos de una recta, entonces la elevación y el desplazamiento podemos escribirlos como:

elevación $= y_2-y_1 = \Delta y$ (se lee "delta y")

desplazamiento $= x_2-x_1 = \Delta x$ (se lee "delta x")



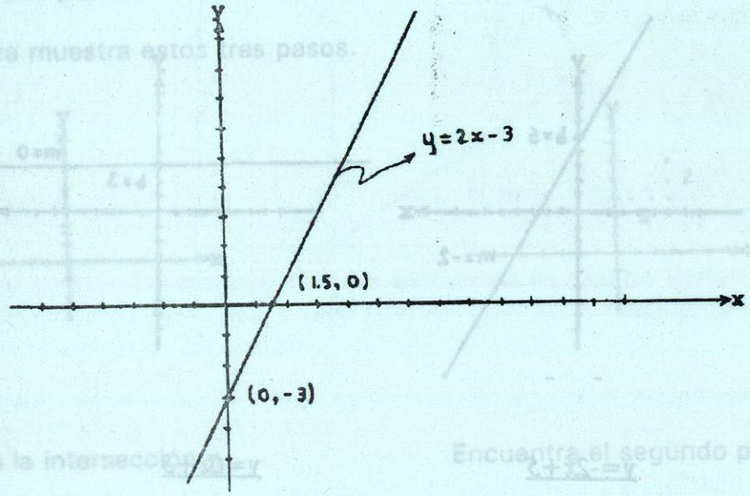
> **FORMULA DE LA PENDIENTE**
>
> Si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son dos puntos de la gráfica de una función lineal, entonces:
>
> $$\text{Pendiente} = m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La gráfica de una función lineal es una recta que debe cortar el eje y en algún punto. Regresemos a la gráfica de la ecuación $y=2x-3$. Observa que la recta corta al eje y en el punto donde $y=-3$. A este número se le llama "intersección y" de la recta, y es el mismo valor que el término constante (b) en la ecuación $y=mx+b$.

De una manera semejante, excepto si la recta es paralela al eje x, tendrá que cortar al eje x en algún punto. En este caso la recta corta al eje x en el punto donde $x=1.5$. Al número 1.5 se le llama "intersección x" de la recta.

Se pudo encontrar la gráfica de esta ecuación de otra forma, determinando las intersecciones con los ejes.

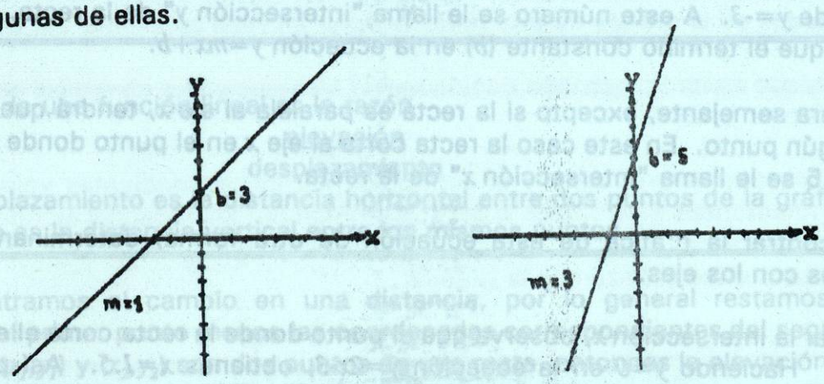
Para encontrar la intersección x, observa que el punto donde la recta corta el eje x es cuando $y=0$. Haciendo $y=0$ en la ecuación $y=2x-3$, obtienes $x=1.5$. Así pues la intersección x es 1.5 y la gráfica pasa por el punto (1.5,0). De manera semejante para encontrar la intersección y, observa que en el punto donde la recta corta al eje y es cuando $x=0$. Haciendo $x=0$ en la ecuación obtienes $y=-3$. La intersección y es -3 y la gráfica pasa por el punto (0,-3).



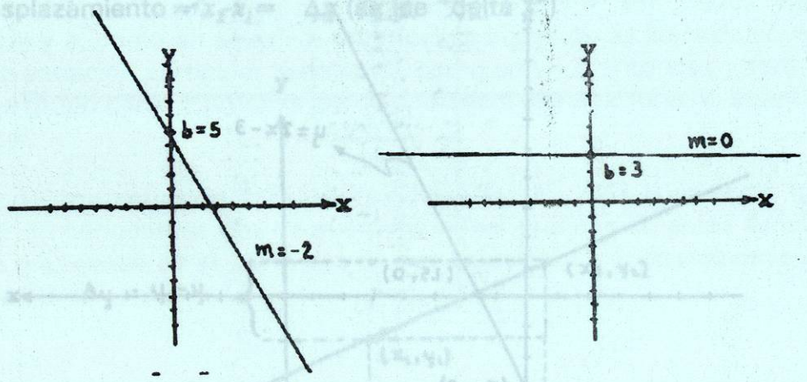
Definición:

> Intersecciones con los ejes
>
> La intersección y de una función es el valor de y cuando $x=0$.
> La intersección x de una función es el valor de x cuando $y=0$.

En el ejercicio 2-1 trazaste las gráficas de cinco funciones lineales. La siguiente figura muestra algunas de ellas.



$y=x+3$ $\qquad$ $y=3x+5$



$y=-2x+5$ $\qquad$ $y=0x+3$

De las gráficas anteriores debes observar las siguientes propiedades:

1. Las gráficas son líneas rectas.
2. El coeficiente del término en x es la pendiente de la recta.
3. El valor de m determina la inclinación de la recta:
   a) Si m es positiva: la recta asciende de izquierda a derecha
   b) Si m es negativa: la recta desciende de izquierda a derecha.
   c) Si m es cero: la recta es horizontal (función constante)
4. El valor del término constante (b) es donde la gráfica cruza el eje y.

FORMA PENDIENTE-INTERSECCION

Si $y=mx+b$, entonces m es la pendiente de la recta y b es la intersección y de la gráfica.

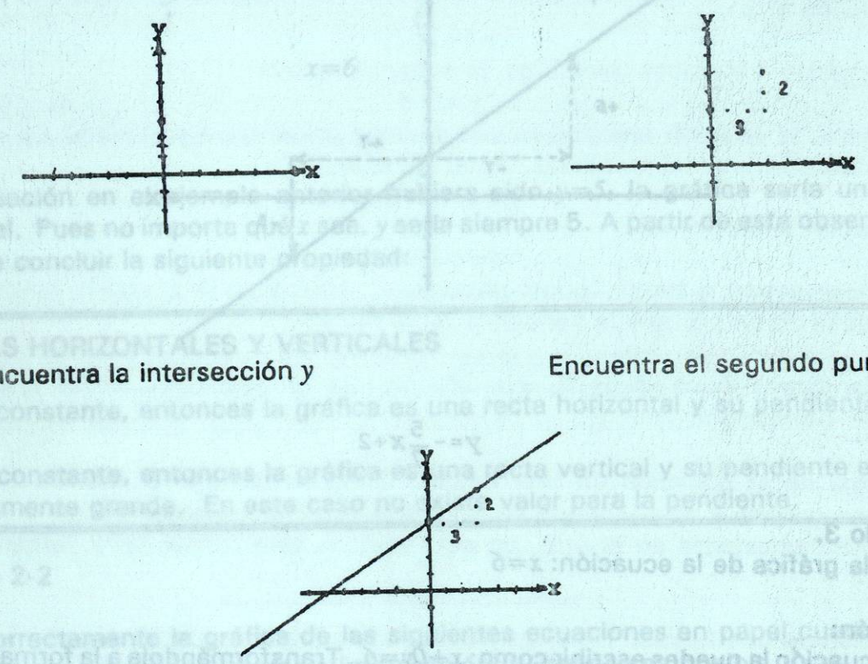
Ejemplo 1.

Traza la gráfica de la ecuación: $y=\frac{2}{3}x+4$

Solución:
Tu procedimiento deberá ser el siguiente:

1. La pendiente es $\frac{2}{3}$ y la intercepción y es igual a 4 (porque $y=4$ cuando $x=0$).
2. Coloca tu lápiz sobre el eje y. 4 unidades arriba del origen en el punto (0,4). Avanza 3 unidades hacia al derecha y luego sube 2 unidades, para señalar otro punto de la gráfica. Repite el proceso si es necesario, para obtener más puntos.
3. Une estos dos puntos con una línea recta.

La siguiente figura muestra estos tres pasos.



Encuentra la intersección y $\qquad$ Encuentra el segundo punto

Dibuja la recta

Ejemplo 2.
Traza la gráfica de la ecuación: $5x+7y=14$

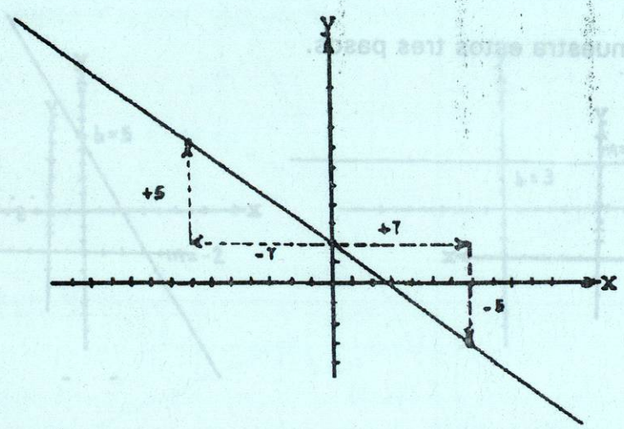
Solución:
Puedes cambiar la forma de esta ecuación a la forma $y=mx+b$. **Así:**

$5x+7y=14$

$7y=-5x+14$

$y=-\frac{5}{7}x+2$

Entonces $m=-\frac{5}{7}$ **y** $b=2$. **Como en este caso la pendiente es un número negativo, uno de los dos, la elevación o el desplazamiento debe ser negativo (y el otro debe ser positivo). Partiendo del punto (0,2) de la gráfica, puedes avanzar 7 unidades hacia la derecha y luego bajar 5, o bien desplazarte 7 unidades hacia la izquierda y luego subir 5 para encontrar el otro punto de la recta. La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación anterior.**



$y=-\frac{5}{7}x+2$

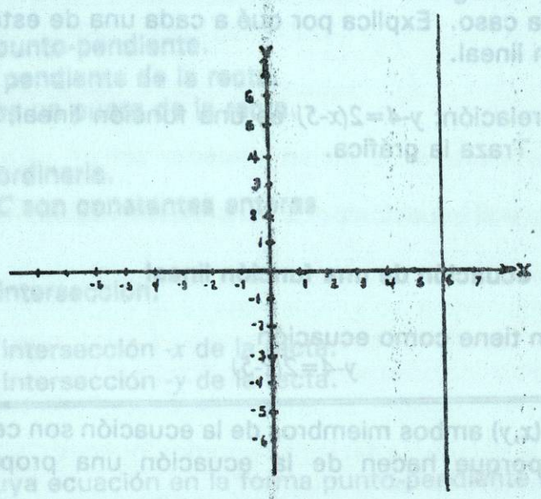
Ejemplo 3.
Traza la gráfica de la ecuación: $x=6$

Solución:
Esta ecuación la puedes escribir como: $x+0y=6$. **Transformándola a la forma** $y=mx+b$, **obtienes**

$0y=-x+6$

$y=-\frac{1}{0}x-\frac{6}{0}$

Las cantidades $-\frac{1}{0}$ **y** $\frac{6}{0}$ **son infinitas. Esto significa que son más grandes que cualquier número real. Por lo tanto no hay pendiente ni intersección -y. Pero el trazo de la gráfica es fácil. Como** x **es siempre 6 sin importar la** y **que sea, la gráfica es una recta vertical. Esta relación no es una función, pues existe más de un valor de** y **cuando** x **es 6.**



$x=6$

Si la ecuación en el ejemplo anterior hubiera sido $y=5$, **la gráfica sería una recta horizontal. Pues no importa qué** x **sea,** y **sería siempre 5. A partir de esta observación, se puede concluir la siguiente propiedad:**

> **RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES**
>
> **Si** $y=$ **constante, entonces la gráfica es una recta horizontal y su pendiente es 0.**
> **Si** $x=$ **constante, entonces la gráfica es una recta vertical y su pendiente es infinitamente grande. En este caso no existe valor para la pendiente.**

Ejercicio 2-2

Traza correctamente la gráfica de las siguientes ecuaciones en papel cuadriculado. Utiliza el concepto de pendiente e intersección -y, donde sea posible.

1. $y=\frac{5}{2}x-1$
2. $y=-\frac{1}{4}x+3$
3. $y=3x-2$
4. $y=-2x+6$