10. La cantidad de combustible que consume un avión varía directamente con el tiempo de vuelo. Supón que un avión de carga ligera de motores gemelos consume 300 kg. de Turbosina en 4 horas de vuelo. La nave puede transportar una carga útil de 940 kg. De éste peso, una parte debe ser destinada para el combustible, cuyo depósito tiene una capacidad máxima de 500 kg. de Turbosina, y el peso sobrante se puede distribuir entre la carga y los pasajeros. Si se incrementa la carga o los pasajeros, se tiene que disminuir la cantidad de combustible suministrado y el tiempo de vuelo será menor.

a) Traza la gráfica de la cantidad de combustible necesario para volar cierto número de horas.
b) Escribe la ecuación particular expresando la cantidad de combustible en función al tiempo de vuelo.
c) ¿Cuántos kg. de carga se pueden transportar si el avión debe volar 5 hrs. para llegar a su destino? El piloto y co-piloto pesan 80 kg. cada uno.
d) Supón que el avión transportará una carga de 260 kg. y a 6 personas que pesan en total 455 kg. ¿Cuál será el tiempo máximo de vuelo?

CAPITULO 3

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES LINEALES

Existen muchas aplicaciones que requieren ser trabajadas con dos o más ecuaciones en distintas variables. En estos casos, las ecuaciones determinan lo que se llama un Sistema de Ecuaciones. En este capítulo, aprenderás una clase de sistemas de ecuaciones y desarrollarás métodos para encontrar las soluciones comunes. Son de particular interés, los métodos que usan matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Iniciarás este aprendizaje, recordando lo que gráficamente representa una ecuación de primer grado en dos variables. Por lo tanto, dos ecuaciones pueden graficarse en dos líneas rectas sobre un plano. Dos líneas rectas distintas en un plano, pueden intersectarse en un punto o mantenerse paralelas.

En esta Unidad aprenderás cómo encontrar la intersección de las gráficas y te dirá esta intersección lo que representan.

3.1 Introducción a un sistema lineal

Dos o más ecuaciones que tienen las mismas variables tal como:

$ax+by=c$

$dx+ey=f$ con a,b,c,d,e,f constantes y coeficientes de x y y por ejemplo:

$$5x+4y=9$$
$$-3x+y=-2$$

Se le dá el nombre de Sistema de Ecuaciones Lineales. Una solución de tal sistema es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones al mismo tiempo. Por esta razón frecuentemente se le llama al sistema "Ecuaciones simultáneas".

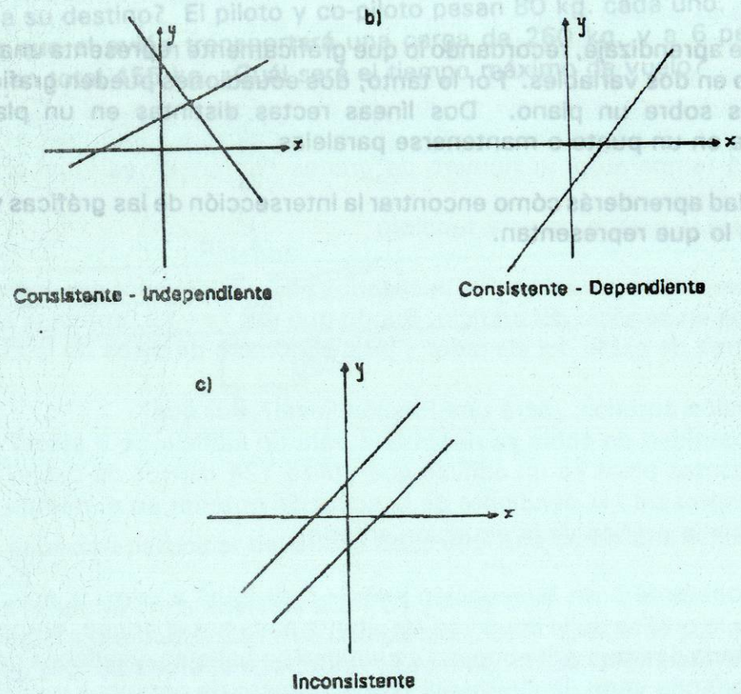

Figura 3.1

Un sistema lineal es llamado consistente independiente si tiene exactamente una solución. La gráfica muestra rectas que se cruzan.

Un sistema lineal es llamado consistente dependiente si tiene muchas soluciones; cualquier solución de una de las ecuaciones es solución del sistema (las gráficas de las líneas coinciden).

Un sistema lineal es llamado inconsistente si no tiene soluciones. (rectas paralelas).

Definiciones:

<u>Sistema:</u> Un sistema de ecuaciones es un conjunto de oraciones abiertas que contienen las mismas variables.
<u>Conjunto solución</u>: El conjunto solución de un sistema es el conjunto de eneadas ordenadas que satisfacen las oraciones abiertas del sistema.

3.2 Solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables lo podrás hacer por los métodos siguientes: El método gráfico que consiste simplemente en graficar el sistema y por simple inspección determinar la solución (punto de intersección) si existe. Esto no es siempre fácil, por lo que recurrimos a otros métodos algebráicos.

El método de eliminación por suma o resta que trataremos mediante un ejemplo

Resolver el sistema

$5x+4y=9$ 1

$\underline{-3x+y=-2}$ 2

Primero multiplicamos la ecuación 2 por 4 con la finalidad de igualar el coeficiente de y en las dos ecuaciones, o sea

$-12x+4y=-8$ 3

Enseguida procederemos a restar la ecuación 3 de la ecuación 1 miembro izquierdo con miembro izquierdo y miembro derecho con miembro derecho.

$$\begin{array}{r} 5x+4y=9 \\ \underline{-12x+4y=-8} \\ +17x+0=17 \\ 17x=17 \\ \therefore\ x=1 \end{array}$$

a continuación el valor de x lo sustituimos en la ecuación 1 o 2 para encontrar el valor de y

$5x+4y=9$ 1

$$\begin{array}{r} 5+4y=9 \\ 4y=4 \\ y=1 \end{array}$$

las ecuaciones $x=1$
$y=1$

forman otro sistema. Ninguna de estas ecuaciones es equivalente a la ecuación 1 ó 2. Pero los sistemas de ecuaciones son equivalentes como puede verse en la figura. Ambos pares de ecuaciones se intersectan en el mismo punto (1,1)

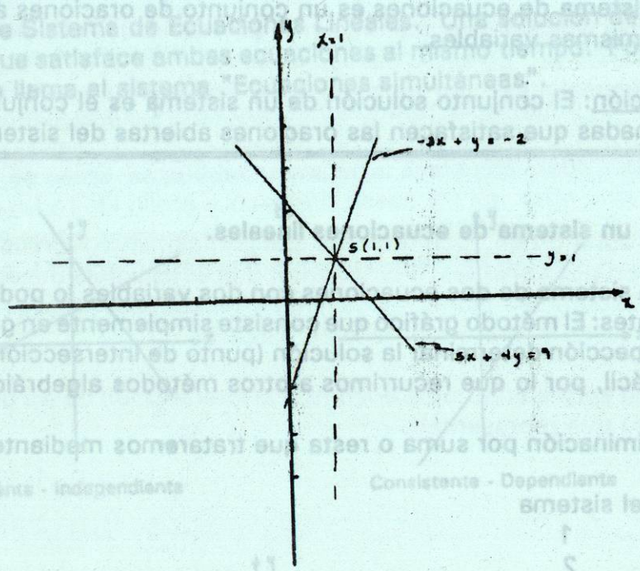

Figura 3.2

El secreto de eliminar una variable es haciendo los coeficientes de x o y en las dos ecuaciones iguales. La eliminación será por sustracción de ecuaciones si los coeficientes son iguales. Pero con signo opuesto, la eliminación de la variable será por adición de ecuaciones miembro a miembro.

Objetivo:

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables se resuelve transformándolo a un sistema equivalente de la forma $x=$constante $y=$constante

Ejemplo 1:

Resuelve el sistema

$2x+3y=13$ 1
$5x+2y=16$ 2

primero la ecuación 1 la multiplicamos por 2 y la ecuación 2 la multiplicamos por 3 o sea

$4x+6y=26$ 3
$\underline{15x+6y=48}$ 4

en seguida restamos ecuación 3 de 4

$11x+0=22$
$11x=22$

$\therefore \quad x=2$

ahora en 1 ó 2 sustituimos el valor de x para encontrar el valor de y

$5x+2y=16$ 2
$10+2y=16$
$2y=6$

$\therefore \quad y=3$

El sistema $x=2$ es equivalente al sistema original por tener ambos la misma solución
$y=3$

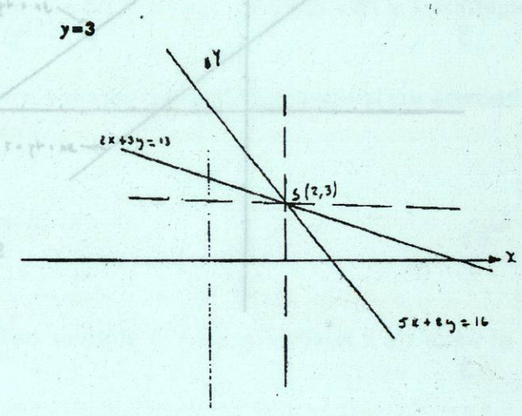

Figura 3.2a

Ejemplo 2

Resuelve el sistema y grafícalo

$3x+4y=7$ 1

$3x+4y=21$ 2

restamos la ecuación 1 de la ecuación 2

$0=14$

esta relación nunca será verdadera, las gráficas de este sistema muestran que no hay punto de intersección de ambas rectas por ser estas paralelas.

Por lo que el conjunto solución será:

$S=\varnothing$ Ecuaciones Inconsistentes

x	y
0	7/4
7/3	0

x	y
0	21/4
7	0

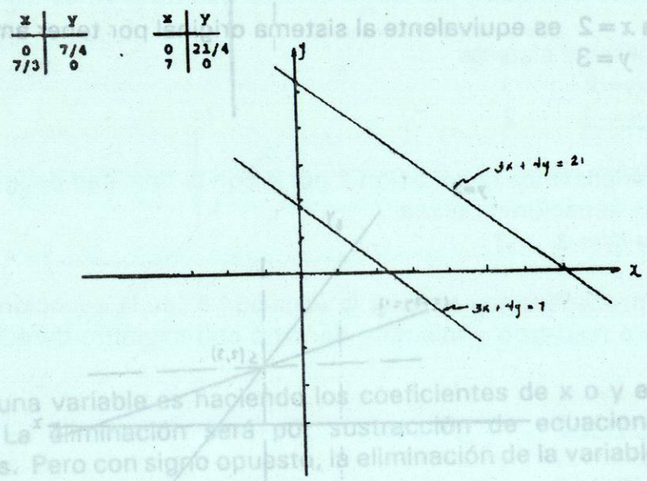

Figura 3-2b

Ejercicio 3.2

Para problemas del 1 al 15, resuelve el sistema y grafica la solución

1. $2x-4y=2$, $4x+6y=3$
2. $2x-3y=2$, $4x+3y=22$
3. $-9x+5y=2$, $6x-4y=-2$
4. $-7x-4y=-5$, $3x+8y=-1$
5. $x+y=1$, $3x+3y=3$
6. $3x-y=13$, $2x-2y=14$
7. $5x+2y=11$, $x+y=4$
8. $9x-5y=26$, $4x-3y=17$
9. $11x-5y=-38$, $9x+2y=-25$
10. $5x+7y=-15$, $2x+9y=-6$
11. $6x-7y=47$, $2x+5y=-21$
12. $14x+31y=-6$, $21x+17y=50$
13. $23x-34y=-46$, $13x+51y=-26$
14. $12x-7y=59$, $8x+11y=-39$
15. $5x+4y=9$, $x+y=2$

Para problemas del 16 al 20 aunque no son sistemas lineales, se puede utilizar el mismo procedimiento para encontrar la solución para x y y

16. $\frac{5}{x}+\frac{2}{y}=7$

$\frac{3}{x}-\frac{10}{y}=-7$

17. $\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=4$

$\frac{5}{x}+\frac{14}{y}=6$

18. $\frac{9}{2x}+\frac{6}{3y}=2$

$\frac{3}{2x}+\frac{6}{3y}=1$

19. $\frac{6}{x}-\frac{7}{y}=8$

$\frac{15}{x}-\frac{14}{y}=21$

20. $\frac{2}{x}-\frac{15}{y}=-18$

$\frac{12}{x}+\frac{5}{y}=25$

1020124184

Para problemas del 21 al 25, determina si las ecuaciones del sistema son independientes, dependientes o inconsistentes.

21. $15x+12y=8$
$10x+8y=13$

22. $24x-56y=72$
$15x-35y=54$

23. $24x+56y=72$
$15x-35y=-45$

24. $x+2y=3$
$4x+8y=12$

25. $15x-12y=8$
$10x+8y=13$

En los problemas 26 y 27 diagrama las gráficas encontrando las x y y intercepciones de cada línea, lee las coordenadas del punto de intercepción. Entonces resuelve el sistema algebráicamente para verificar que la solución de la gráfica es correcta.

26. $2x+3y=-12$
$8x-5y=40$

27. $5x+2y=20$
$3x-7y=21$

Método de eliminación por sustitución: lo ejemplificaremos resolviendo el problema 28

28. $x-3y=13$ 1
$5x+3y=2$ 2

Solución:
De la ecuación 1 despejamos x y nos queda

$x=13+3y$ 3

este valor de x lo sustituimos en la ecuación 2

$$5(13+3y)+3y=2$$
$$65+15y+3y=2$$
$$65+18y=2$$
$$18y=-63$$
$$y=\frac{-63}{18}$$

Ahora, para encontrar el valor de x sustituimos en 3 el valor de y, o sea:

$x=13+3y$ 3

$$x=13+3\left(\frac{-63}{18}\right)$$
$$x=\frac{234-189}{18}$$
$$x=+45/18$$
$$x=2.50$$

Usa el método por sustitución para resolver los problemas siguientes:

29. $7x-3y=-23$
$x-5y=32$

30. $7x-6y=-30$
$x-4y=-20$

31. $2x-9y=14$
$6x-y=42$

32. $3x+y=13$
$2x-4y=18$

33. $8x+3y=11$
$5x-4y=1$

3.3 Determinantes de segundo orden.

Has utilizado algunos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Ahora aprenderás a emplear DETERMINANTES para el mismo fin y notarás que será más fácil operar con ellos.

Un sistema general de ecuaciones con dos variables es

$ax+by=c$ 1
$dx+ey=f$ 2

donde a, b, d, e son los coeficientes de x y y, en tanto c y f con constantes.

Eliminemos la variable y para lo cual multiplicamos 1 por e y la ecuación 2 la multiplicamos por b.

$aex+bey=ce$ 3
$bdx+bey=bf$ 4

en seguida restamos ecuación 4 de 3 miembro a miembro

$aex-bdz=ce-bf$

factor común x

$(ae-bd)x=ce-bf$

despejamos x

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$$

Eliminando x, resolvemos el sistema para y de manera similar quedándonos

$$y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

Estas son fórmulas que puedes usar para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Observaciones:

1. Ambos denominadores son iguales y contienen sólo los coeficientes del miembro izquierdo de las ecuaciones.

2. El numerador para x no contiene los coeficientes de x que son a y d.

3. El numerador para y no contiene los coeficientes de y que son b y e.

4. Las constantes c y f aparecen en los numeradores de x y y.

Las fórmulas para x y y deducidas del sistema general son:

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{y} \quad y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

que podemos representar mediante los arreglos siguientes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

En donde el arreglo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae-bd$$

que es diferencia del producto de las diagonales.

De igual forma los arreglos

$$\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce-bf \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af-cd$$

Diferencias del producto de las diagonales.

Definición:

> Al arreglo de 4 números que forman dos renglones y dos columnas recibe el nombre de determinante de segundo orden y su valor se obtiene por diferencia de producto de las diagonales.

$$\begin{vmatrix} o & p \\ q & r \end{vmatrix} = or-pq$$

en $$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Nombraremos al determinante del denominador con la letra D tanto en x como en y por ser iguales.

En x al determinante del numerador lo nombraremos con las letras Nx fijándonos que en la primera columna están las constantes c y f en lugar de a y d.

En y el determinante del numerador lo nombraremos con las letras Ny fijándonos que en la segunda columna están las constantes c y f en lugar de b y e.

Resumiendo: la solución del sistema

$ax+by=c$
$dx+ey=f$

Será

$$X=\frac{Nx}{D} \quad \text{y} \quad Y=\frac{Ny}{D}$$

Objetivo:

> Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, resuélvelo usando determinantes de segundo orden.

Ejemplo 1

Resuelve por determinantes el sistema

$5x+4y=9$
$2x+3y=5$

Solución:

D es el arreglo formado por los coeficientes de las variables o sea

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$