Ahora, substituye este valor de x en la ecuación dada y calcula la coordenada y.

$$y=2(1)^2-4(1)+3$$
$$y=2-4+3$$
$$y_v=1$$

El vértice de la gráfica se encuentra en el punto (1,1).

Objetivo:

Aprender que en la ecuación de una función cuadrática, existen dos valores de x que satisfacen la ecuación dada, para un valor dado de y, excepto para el punto donde la gráfica de la función tiene el vértice, donde existe un solo valor de x para el valor dado de y.

Aprender a calcular las coordenadas del vértice.

Ejercicio 4.3

Contesta las siguientes preguntas en forma oral o escrita, como tu maestro lo indique

1. Dada la ecuación de una función cuadrática y un valor de y ¿Cuál es el número máximo de valores de x que satisfacen la ecuación dada, para el valor de dado?
2. ¿Cuál es el único punto de la gráfica de una función cuadrática, donde para u valor dado de y, existe un solo valor de x que satisface la ecuación de l función?
3. En la fórmula general cuadrática, ¿a qué expresión se le llama discriminante
4. Si el discriminante es positivo, ¿cuál es el número y la naturaleza de la respuestas que se obtienen?
5. Si el discriminante es igual a cero, ¿qué puedes decir acerca del número naturaleza de las respuestas obtenidas?
6. ¿Cómo calculas la coordenada x del vértice de la gráfica de una funció cuadrática?
7. ¿Cómo calculas la coordenada y del vértice de la gráfica?

En las siguientes ecuaciones calcula el valor de y para los valores dados de x: $x=$ $x=0$

1) $y=x^2-x+6$
2) $y=x^2+3$
3) $y=2x^2+12x+20$
4) $y-4=2(x-2)^2$

En las siguientes ecuaciones de funciones cuadráticas, calcula las coordenadas de punto donde las gráficas de cada una de ellas corta el eje de las y.

5) $y=x^2-6x+8$
6) $y=x^2+2x$
9) $y=x^2+4x+7$
10) $y=(x+1)^2$

7) $y=3x^2$
8) $y=x^2-9$
11) $y-2=3(x+2)^2$
12) $y=(x+2)(x-3)$

En las siguientes ecuaciones de funciones cuadráticas, calcula los valores de x que satisfacen las ecuaciones dadas, para los siguientes valores dados de y: $y=1$, $y=0$

13) $y=(x+2)(x-1)$
14) $y=(x+2)^2-3$
15) $y-3=-2(x-1)^2$
16) $y=x^2+2x-3$
17) $y=-x^2+4x$
18) $y=x^2-4x+1$

En las siguientes ecuaciones de funciones cuadráticas, calcula las intersecciones X. (Resuelve por factorización donde sea posible).

19) $y=x^2+4x$
20) $y=2x^2$
21) $y=x^2-9$
22) $y=x^2+2x-3$
23) $y=0.5x^2-1.25x+0.5$
24) $y=x^2+0.1x-1.65$

Calcula las coordenadas del vértice de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas.

25) $y=x^2-2x-8$
26) $y=x^2+x-0.75$
27) $y=(x+2)^2$
28) $y=(x-1)^2+2$
29) $y=-x^2+5x-6$
30) $y=0.32x^2+0.4x-6$

4.4 Valores no reales de x, para un valor real dado de y

Hemos aprendido que si tenemos una función cuadrática dada, $y=ax^2+bx+c$, y sustituimos en ella la x por un valor real cualquiera, obtenemos un valor real para y.

También aprendimos el proceso inverso, es decir, si damos un valor real a y, podemos calcular los valores de x que satisfacen la ecuación para el valor dado de y.

En este último caso, si el discriminante en la fórmula general cuadrática es positivo, $(b^2-4ac)>0$, los valores de x que satisfacen la ecuación son dos, reales y diferentes, y si $(b^2-4ac)=0$ el valor de x es uno solo y real.

Ahora seguramente te preguntarás: ¿y qué pasa si el discriminante $(b^2-4ac)<0$, es decir, es negativo?

Para contestarte esta pregunta vamos a volver a la función $y=x^2-4x+3$, y a su gráfica en la figura 1.

En la gráfica de la figura 1, en el tercer cuadrante está marcado en punto (-1,-2), la coordenada de ese punto es $y=-2$, qué respuesta obtendremos si preguntamos a la ecuación dada: ¿Cuáles son los valores de x que sustituidos en la ecuación den $y=-2$?

$y=x^2-4x+3$; si $y=-2$

$-2=x^2-4x+3$

$0=x^2-4x+5$

$x^2-4x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

La $\sqrt{-4}$ no es un número real, decimos que tenemos un número imaginario, pues no existe un número real que elevado al cuadrado sea igual a (-4), por lo tanto, no se pueden obtener valores reales para x en este caso, es decir, las soluciones no son números reales, ¿Qué significa esto?

Significa, que si el discriminante $(b^2-4ac)<0$, los valores de x no son reales, lo que no dice, que no existen valores reales de x que sustituidos en la ecuación dada, nos dé un valor de $y=-2$.

Precisamente por esto, la expresión (b^2-4ac) se le llama "discriminante", porque de todas las soluciones posibles que podemos obtener al usar la fórmula general cuadrática, esta expresión "discrimina" las soluciones "no reales", de las que sí son números reales.

Algo más, si observamos la gráfica de la figura (1), ningún punto perteneciente a la gráfica tiene una coordenada $y=-2$.

Ahora una pregunta para ti, ¿Qué pasa con la gráfica de una función cuadrática, si los valores de las intersecciones X no son números reales?

Discute la respuesta con tu maestro.

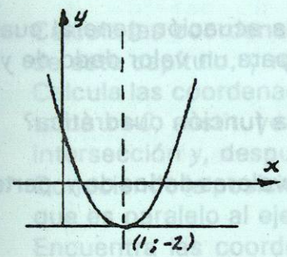
Conclusión:

> Si al resolver la ecuación de una función cuadrática para un valor dado de y, el discriminante en la fórmula general cuadrática $(b^2-4ac)<0$, es decir, es negativo, significa que no existen valores reales en el dominio de la función, que satisfagan la ecuación por el valor dado de y.

El dominio de la función cuadrática son todos los valores reales que puede adoptar la variable independiente x, para cada uno de los cuales la ecuación da un valor real de la variable dependiente y. En la función cuadrática, la variable independiente x puede tomar cualquier valor entre menos infinito y más infinito, es decir, el dominio es $(-\infty,\infty)$.

Sin embargo, el rango o contradominio de la función cuadrática, que lo componen todos los valores reales que toma la variable dependiente y, en función de los valores de la variable x, no es de $(-\infty,\infty)$, como ya vimos anteriormente cuando obtuvimos valores no reales de x, para un valor dado de y.

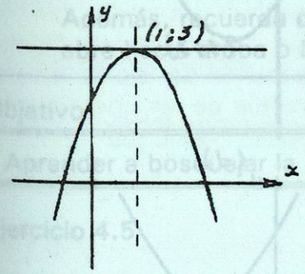
Si conoces la gráfica de una función cuadrática, es muy fácil saber el rango de la función, por ejemplo: supongamos que tenemos la gráfica de una función cuadrática figura (2), y conocemos por supuesto, las coordenadas del vértice.



Traza una línea punteada paralela al eje de las x y que pase por el vértice de la parábola. Esta línea parte el eje y en dos partes, todos los valores de y que están hacia el lado donde se encuentra la gráfica, componen el rango de la función.

En la gráfica de la figura (2) $y\geq-2$, es decir, el rango es $[-2, \infty)$. Veamos otro ejemplo:

Supongamos que tenemos la gráfica de una función cuadrática en la figura (3). ¿Cuál es el rango de la función?



Traza la línea punteada. El rango de la función es: $y\leq3$ o $[3,-\infty]$

Objetivo:

Comprender el significado de las soluciones "no reales" de la fórmula general cuadrática, cuando se resuelve la ecuación de una función cuadrática para un valor dado de la variable dependiente y.

Ejercicio 4.4

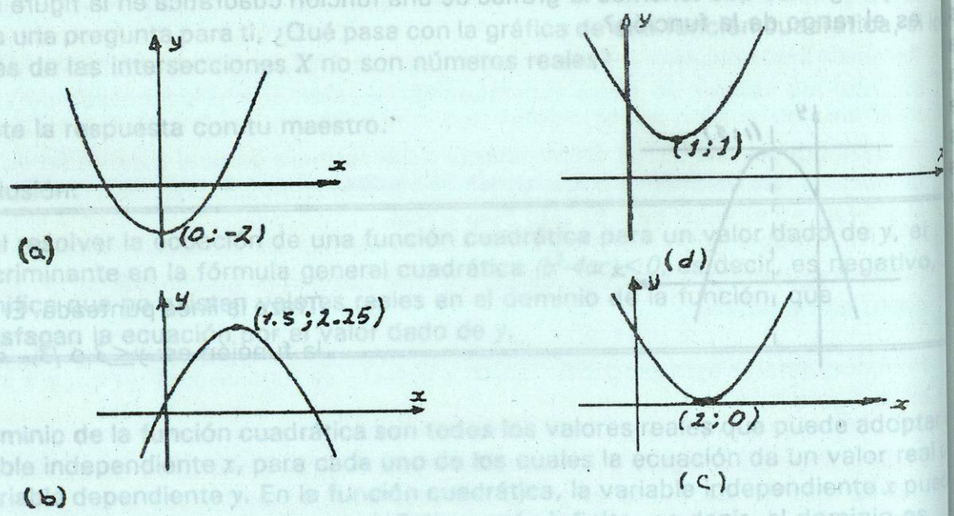
Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la naturaleza de las respuestas de la fórmula general cuadrática, cuando el discriminante $(b^2-4ac)<0$?
2. ¿Qué significa que los valores de x dados por la ecuación general cuadrática sean números "no reales", cuando se resuelve para un valor dado de y?
3. ¿Cuál es el dominio de la función cuadrática?
4. ¿Gráficamente cómo encuentras el rango de una función cuadrática?

En las siguientes funciones cuadráticas, investiga si los valores dados de y, pertenecen al rango de la función.

1) $y=x^2+2x-8$ para $y=0;\ y=-10$
2) $y=x^2-2$ para $y=0;\ y=-3$
3) $y=(x+1)(x-3)$ para $y=1;\ y=0$
4) $y-2=(x-3)^2$ para $y=3;\ y=0$
5) $y=x^2-3x+1.25$ para $y=3;\ y=1.25$

En las siguientes gráficas identifica el rango de la función cuadrática representada en cada figura.



Si la gráfica se abre hacia arriba, ¿Qué puedes decir del valor mínimo de la coordenada y?, y si se abre hacia abajo, ¿Qué puedes decir del valor máximo de la coordenada y?

4.5 Bosquejo de la gráfica de la función cuadrática.

Bosquejar una gráfica significa dibujarla en forma aproximada, pero calculando exactamente las coordenadas de ciertos puntos importantes, representar en un plano coordenado los pares de números obtenidos y unirlos con una línea curva continua. Los puntos importantes de la gráfica son los siguientes:

1. Calcula las coordenadas del vértice en la forma indicada al final del punto 4.3 de este capítulo, y representa en un plano coordenado.
2. Calcula las coordenadas del punto donde la gráfica corta el eje de y, para ésto, toma $x=0$, sustituye este valor en la ecuación de la función dada y calcula la intersección y, después representa este punto $(0\ ,\ y)$ en el plano coordenado.
3. Conociendo la posición del vértice de la gráfica, puedes trazar el eje de simetría, que es paralelo al eje y y pasa por el vértice.
4. Encuentra las coordenadas del punto simétrico de la intersección y, ya que tienen la misma coordenada y y la coordenada x, es el doble de la distancia del punto donde la gráfica corta el eje y, al eje de simetría.
   Si el vértice de la gráfica está sobre el eje de y, es decir, el eje de y es a la vez el eje de simetría, entonces el vértice y la intersección Y, son el mismo punto.
5. Calcula las intersecciones X, para ello toma $y=0$ y sustituye este valor en la ecuación dada, después resuélvela para encontrar los valores de x, ya sea por factorización o empleando la fórmula general cuadrática. Si los valores de la intersección X, no son números reales, significa que la gráfica no toca el eje de x.
   Si por la forma en que está dada la ecuación, decides obtener primero las intersecciones X, o primero la intersección Y, y al último las coordenadas del vértice o en otro orden, es tu elección, ya que su cálculo es independiente uno de otro.
   Además, recuerda que el signo del coeficiente de x^2, te indica si la gráfica se abre hacia arriba o hacia abajo.

Objetivo:

Aprender a bosquejar la gráfica de una función cuadrática.

Ejercicio 4.5

Contesta las siguientes preguntas

1. ¿Cómo encuentras las coordenadas del vértice?
2. ¿Cómo encuentras la intersección Y?
3. ¿Cómo encuentras las intersecciones X?

En un papel cuadriculado bosqueja las gráficas de las siguientes funciones cuadrática

1) $y=x^2-x-6$
2) $y=x^2+6x+7$
3) $y=(x-2)^2$
4) $y=x^2-4x$
5) $y=-x^2+4$
6) $y=-x^2+2x-3$
7) $y=x^2-x-2$
8) $y=-x^2+2x+3$
9) $y=x^2$
10) $y=(x+2)^2$

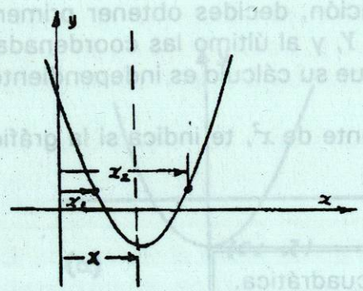
Contesta las siguientes preguntas.

1) Si la intersección X es un solo valor, ¿Cómo queda posicionada la gráfica de función?
2) Si las intersecciones X no son números reales, ¿Cómo queda posicionada gráfica de la función?
3) ¿Qué define si la gráfica se abre hacia arriba o hacia abajo?

4.6 Dos tópicos importantes

1. La semisuma algebráica de las coordenadas x de dos puntos simétricos, es coordenada x_v del vértice.

Existe otra forma de demostrar que la coordenada x_v del vértice de la gráfica de u función cuadrática es $x_v = -\frac{b}{2a}$, en seguida te la mostraremos.



En la figura (4), tenemos dos punt simétricos de la gráfica, tienen misma coordenada y, y est equidistantes respecto al eje simetría. La coordenada "x" que n da la posición del eje de simetría, el promedio de las coordenadas x_1 x_2, es decir, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

Como el eje de simetría pasa por el vértice, entonces este valor de x corresponde a la coordenada x_v del vértice. Si usamos la fórmula general cuadrática para calcular x_1 y x_2, tenemos que:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=-b\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

por lo tanto,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Los términos que contienen el radical son iguales y de signos contrarios, por lo tanto se eliminan, entonces,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=2\left(\frac{-b}{2a}\right)=-\frac{b}{a}$$

ahora, la semisuma es:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$$

Pero

$$x_v=-\frac{b}{2a}$$

Hemos obtenido el mismo resultado para la coordenada x del vértice.

2. Forma del Vértice

Vamos a recordar como elevar un binomio al cuadrado.

Ejemplo 1

$(x-3)^2$

$= (x-3)(x-3)$ Por definición de elevar al cuadrado.

$= x^2-3x-3x+9$ Multiplicar cada término del primer binomio por cada uno del segundo.

$= x^2-6x+9$ Simplificar los términos semejantes.

Observa que el coeficiente del término lineal, -6, es el doble del segundo término del

binomio, -3, y el término independiente, 9, es el cuadrado del mismo.

Ahora vamos a recordar cómo completar el cuadrado.
Si tenemos la siguiente expresión,

$$x^2 - 6x$$

qué son los dos primeros términos de la expresión final del ejemplo anterior, tenemos que agregar un término tal, que se complete un trinomio cuadrado perfecto, para poder expresarlo como un binomio al cuadrado.

Ejemplo 2

$x^2-6x+(\frac{-6}{2})^2$

Divides el coeficiente del término lineal, -6, entre 2, eleva el resultado al cuadrado y súmalo a la expresión.

$= x^2-6x+(-3)^2$

Esto es un trinomio cuadrado perfecto.

$= (x-3)^2$

Exprésalo como binomio al cuadrado.

El término que agregas enciérralo en paréntesis incluyendo el signo, como lo hicimos anteriormente, así puedes fácilmente identificar el segundo término del binomio.

Empleando este procedimiento de completar el cuadrado, puede darse a la ecuación de una función cuadrática, una forma llamada "forma del vértice", porque de ella se encuentran directamente las coordenadas del vértice de la gráfica.

Veamos un ejemplo:

La siguiente función cuadrática transfórmala a la forma del vértice.

$y= x^2-4x+3$

$y-3=x^2-4x$

pasa el término independiente al lado de la ecuación.

Ahora en la parte derecha vamos a completar el cuadrado, igual como lo hicimos anteriormente, pero ahora tenemos una igualdad y tenemos que conservarla.
Dividimos el coeficiente del término lineal, -4, entre 2 luego elevamos el resultado al cuadrado y lo sumamos y restamos a la expresión para que no se altere la igualdad.

$$y-3=x^2-4x+(\frac{-4}{2})^2-(\frac{-4}{2})^2$$

$y-3=x^2-4x+(-2)^2-(-2)^2$

$y-3=[x^2-4x+(-2)^2]-4$

los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto.

$y-3=(x-2)^2-4$

$y-3+4=(x-2)^2$

$y+1=(x-2)^2$

simplifica los términos semejantes.

Esta ecuación final, es la ecuación de una función cuadrática en la forma del vértice. El valor de x que hace 0 la parte derecha de la ecuación, es la coordenada x_v del vértice, porque así se obtiene un sólo valor de y, que es la característica de las coordenadas del vértice. En éste ejemplo $x=2$, por lo tanto:

$y+1=0$

$y=-1$

las coordenadas del vértice son $x=2$; $y=-1$.
En forma general la forma del vértice se escribe como sigue:

$$\boxed{y-k=a(x-h)^2}$$

k, h y a son constantes, (h,k) son las coordenadas del vértice.

Ejemplo:

Transforma a la forma del vértice la siguiente ecuación:
$y=3x^2-12x+15$
(el coeficiente a no es igual a la unidad)

$y-15=3x^2-12x$

Pasa el término independiente al lado izquierdo de la ecuación.

$y-15=3(x^2-4x)$

El coeficiente a de x^2, se saca como factor común.

Ahora procedemos en la misma forma con la expresión dentro del paréntesis.

$y-15=3[x^2-4x+(-2)^2-(-2)^2]$

Divide el coeficiente del término lineal entre dos, elévalo al cuadrado y súmalo y réstalo dentro del paréntesis.

$y-15=3[(x-2)^2-4]$

Los tres primeros términos son un binomio al cuadrado.

$y-15=3(x-2)^2-12$

Ejecuta la multiplicación y quita el paréntesis rectangular.

$y-15+12=3(x-2)^2$

Pasa el término independiente (-12), a la parte izquierda de la ecuación.

$y-3=3(x-2)^2$

Reduce los términos semejantes.

4.7 Aplicaciones de la función cuadrática a problemas del mundo real

Existen muchos problemas prácticos que para su estudio, pueden representarse matemáticamente como una función cuadrática.

Cuando estudiamos la función cuadrática y su comportamiento, identificamos una variable dependiente y, cuyos valores dependían de los valores que tomaba una variable independiente que llamamos x.