En los problemas prácticos, estas dos variables representan valores de cosas reales, y necesitamos determinar, el valor de cual de ellos depende del valor de la otra, después de ésto, debemos darles una identificación, es decir, asignarles una letra apropiada para manejarlos fácilmente.

En muchos casos las letras que asignamos a las variables no serán x y y, pero siempre el eje vertical en un sistema de coordenadas, será el de los valores de la variable dependiente, y el eje horizontal será, el de los de la variable independiente.

Vamos a mostrarte dos ejemplos prácticos que pueden estudiarse con ayuda de la función cuadrática.

Ejemplo 1.

Lanzamiento de un objeto verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial conocida.

Cuando un objeto como una piedra o una pelota, se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial conocida, la distancia a la que se encuentra el objeto a partir del punto de lanzamiento, depende del tiempo, que haya transcurrido desde que fue lanzado.

La distancia es la variable dependiente, y la llamaremos y.

El tiempo es la variable independiente y le llamaremos t.

En tus cursos de Física te demostrarán que la siguiente ecuación, es la que establece la relación entre y y t.

$$y=V_o t-4.9\,t^2$$

donde: y es la distancia a la que se encuentra el objeto del punto de lanzamiento.
t es el tiempo transcurrido desde que el objeto fue lanzado.
V_o es la velocidad inicial con que el objeto fue lanzado.

Como puedes ver la variable dependiente y, está en función de la variable independiente t elevada al cuadrado, es decir, la relación entre ellas es una función cuadrática.

Resolveremos en seguida un problema:

Si una pelota se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 30 m/seg. ¿Cuánto tiempo está en el aire?, ¿Cuál es la altura máxima?

$$y=-4.9t^2+30t$$

Escribimos primero el término que contiene la variable independiente t elevada al cuadrado, para que identifiques fácilmente los coeficientes a, b y c de la función cuadrática: $a=-4.9$, $b=30$ y $c=0$.

Para visualizar mejor la relación entre la altura y el tiempo transcurrido, vamos a bosquejar la gráfica de la ecuación dada, para ello, calcularemos la intersecciones con los ejes y el vértice de la gráfica, y los representaremos en un plano coordenado.

1) Calculemos las coordenadas del punto donde la gráfica corta el eje vertical, para ello, tomamos $t=0$ y lo sustituimos en la ecuación,

$$y=-4.9(0)^2+30(0)=0$$

la gráfica corta el eje vertical en $t=0$; $y=0$, es decir, en el origen de las coordenadas.

2) Los puntos donde la gráfica corta el eje horizontal es donde $y=0$, calcula los valores de t.

$$0=-4.9t^2+30t$$
$$-4,9t^2+30t=0 \quad \text{por simetría de la igualdad}$$
$$t(-4.9t+30)=0 \quad \text{por factorización}$$

Esta expresión es cero si:

$$t=0 \quad ó \quad (-4.9t+30)=0$$

por lo tanto los valores buscados son:

$$t=0 \text{ seg} \quad y \quad t=6.12 \text{ seg}$$

las unidades de t, son segundos [seg].

3) El vértice: la abscisa del vértice es,

$$t_v=-\frac{b}{2a}=-\left(\frac{30}{-9.8}\right)=3.06seg$$

este valor lo sustituimos en la ecuación y calculamos y_v la ordenada del vértice

$$y_v=-4.9(3.06)^2+30(3.06)$$
$$y_v=-45.86+91.80=45.94 \text{ m.}$$

las unidades de y, son metros [m].

El vértice se encuentra en, $t=3.06$ y $y=45.94$

Con estos puntos, y sabiendo que la gráfica se abre hacia abajo, $a<0$, podemos bosquejar la gráfica.

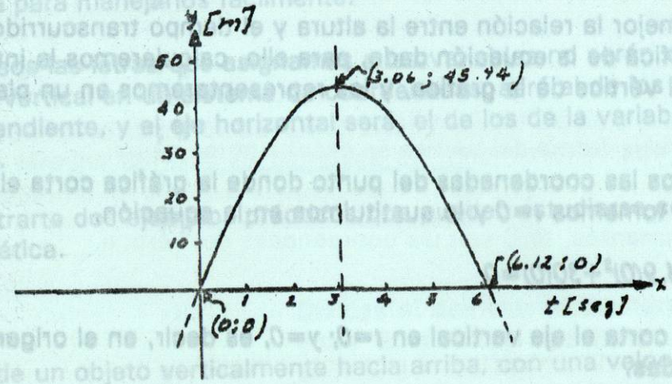


Figura 5

Si observamos la gráfica, podemos contestar las dos preguntas iniciales.

1) La altura máxima es $y=45.94$ m, que es la ordenada del vértice y se alcanza a los 3.06 seg. de lanzado el objeto.

2) La pregunta de cuanto tiempo estuvo en el aire, no es difícil de contestar.

Cuando $t=0$, $y=0$, es el momento en que se lanza el objeto, todavía esta en el suelo.

Ahora, cuando han transcurrido 6.12 seg, y vuelve a valer cero $(y=0)$, es decir, es el momento en que cae al suelo, por lo tanto, estuvo 6.12 seg en el aire, que es la respuesta que buscamos.
Además, podemos observar que existen dos tiempos diferentes en que el objeto está a la misma altura, cuando sube y después cuando baja.

Hay algo sumamente importante que tienes que comprender muy bien, las fórmulas son los dibujos matemáticos a veces no muy exactos de los fenómenos y problemas del mundo real, por ejemplo, en el problema que analizamos anteriormente, la fórmula es válida si despreciamos la fricción del aire.

Además, la fórmula de la función cuadrática da un valor de la variable dependiente, para cada valor real que tome la variable independiente, pero nos interesan solamente aquellos que corresponden al problema que analizamos en cada caso.

Por ejemplo, en el problema anterior, los valores de y para valores negativos de t y para valores t mayores a 6.12 seg, no corresponden al movimiento del objeto lanzado en este caso.

Para valores negativos de t, el objeto no ha sido lanzado todavía, y para $t>6.12$ seg, el objeto ya cayó al suelo, y el movimiento cesó.

La parte de la gráfica con línea llena, es la que representa la relación entre y y t que nos interesa, porque corresponde al problema que estudiamos, y los puntos de la línea punteada pertenecen a la gráfica de la función, $y=f(t)$, pero no corresponden al caso que analizamos.

En este caso, se nos dio la ecuación que establecía la relación entre las variables, pero en el siguiente problema, vamos a tener que establecer la ecuación que relaciona las variables que nos van a interesar.

Promoción Turística

Una agencia de turismo quiere hacer una promoción para sus viajes por los centros históricos de la ciudad, el costo del boleto por persona es de $20.00, pero anuncian que si el número de viajantes excede de 20, el costo del boleto disminuirá en $0.50 por cada persona que exceda de 20.

La agencia quiere determinar el número de personas que exceden de 20 para obtener la máxima utilidad, ya que nos es difícil concluir, que si el número de personas arriba de 20 es suficientemente grande, llegará el momento en que el boleto saldría gratis.

El costo del boleto = $(20 - 0.5x)$

donde x, es el número de personas que excede de 20.

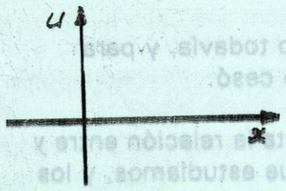
El número de turistas = $(20 + x)$.

La utilidad será el producto del número total de turistas, por el costo del boleto en cada caso.

$U = (20+x)(20 - 0.5x)$
$U = 400-10x+20x-0.5x^2$
$U = 400+10x-0.5x^2$
$U = -0.5x^2+10x+400$ reordenemos los términos

La utilidad "U", es función del cuadrado del número x de turistas que excede de 20, es decir, la ecuación es la de una función cuadrática.

La variable independiente es x y la variable dependiente es "U".



Tracemos la gráfica en un sistema de coordenadas como el mostrado en el lado izquierdo.

1) La gráfica se abre hacia abajo $a<0$
2) La intersección con el eje vertical "U".
Hacemos $x=0$ y calculamos "U" de la ecuación
$y=400$
3) Las intersecciones con el eje x hacemos $U=0$

$$0=-0.5x^2+10x+400$$

$$-0.5x^2+10x+400 \quad \text{por simetría de la igualdad}$$

$$x_{1-2}=\frac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4(-0.5)400}}{2(-0.5)}$$

$$x_{1-2}=\frac{-10\pm\sqrt{900}}{-1}=\frac{-10\pm30}{-1}$$

$$x_1=\frac{-10+30}{-1}=\frac{20}{-1}=-20$$

$$x_2=\frac{-10-30}{-1}=\frac{-40}{-1}=40$$

4) Las coordenadas del vértice

$$x_v=-\left(\frac{b}{2a}\right)=-\left[\frac{10}{2(-0.5)}\right]=-\left(\frac{10}{-1}\right)$$

$$x_v=-(-10)=10$$

$$U_v=-(-0.5(10)^2+10(10)+400$$

$$U_v=-50+100+400=450$$

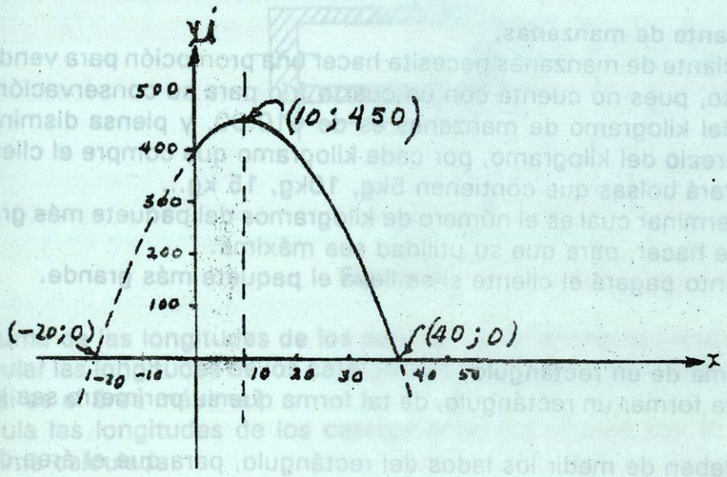


Figura 6

Vemos que la utilidad es máxima para $x=10$ personas extras, el grupo óptimo estaría formado por 30 personas, la utilidad en este caso será $450.00

Si aumenta el número de personas extras, la utilidad disminuye, cuando $x=40$, el boleto saldrá gratis.

Con esto la agencia sabe que su promoción no debe sobrepasar de 10 personas extras, en un grupo inicial de 20 personas.

Los puntos de la gráfica en las partes punteadas, ya no se ajustan a la realidad, ¿explica porqué?

Como puedes observar, en los siguientes problemas reales solo una parte de todos los pares de puntos que nos da una función cuadrática, responden a la realidad que analizamos.

También, muchas veces no será necesario bosquejar la gráfica de la función, pues sólo será necesario analizar las soluciones que se ajusten al valor dado de la función, por ejemplo:

En los problemas que pueden representarse matemáticamente como funciones cuadráticas, y se pide que encontremos el valor máximo o mínimo de la función, será sólo necesario encontrar las coordenadas del vértice de la gráfica de la función, ya que si la gráfica se abre hacia arriba, ese punto representará el valor mínimo de la función; y si se abre hacia abajo representará el máximo de la función.

Ejercicio 4.7

1.- **El comerciante de manzanas.**
Un comerciante de manzanas necesita hacer una promoción para vender rápido su producto, pues no cuenta con un cuarto frío para su conservación.
El precio del kilogramo de manzanas es de $10.00, y piensa disminuir en $-$0.20 el precio del kilogramo, por cada kilogramo que compre el cliente, para ello preparará bolsas que contienen 5kg, 10kg, 15 kg...

a) Determinar cuál es el número de kilogramos del paquete más grande que debe hacer, para que su utilidad sea máxima.

b) Cuánto pagará el cliente si se lleva el paquete más grande.

2.- **Area máxima de un rectángulo**
Se necesita formar un rectángulo, de tal forma que su perímetro sea igual a 40 cm.
¿Cuánto deben de medir los lados del rectángulo, para que el área del mismo sea máxima?

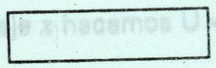


Figura 7

3.- **El Corral**
Un ganadero quiere construir un corral para engorda de ganado, y tiene pensado hacerlo a orillas de un pequeño río que pasa por su propiedad, para ahorrarse material en la construcción de la cerca y para que el ganado pueda abrevar. Cuenta con 200 metros de malla de alambre para construirlo.
¿Qué dimensiones debe tener el corral, si su forma es rectangular, para que el área sea máxima?

Figura 8

4.- **La Pista**
En un parque rectangular que mide 100 mts. de largo y 50 mts. de ancho, se piensa construir una pista alrededor del mismo para que la gente pueda tratar de hacer ejercicio. Se cuenta con material para construir 1600 m^2 de pista.

a) ¿Qué ancho debe tener la pista para que el área de la misma sea 1600 m^2?

b) ¿Qué opinas sobre la solución negativa que se obtiene de la fórmula general cuadrática?

c) Bosqueja la parte de la gráfica que relaciona el área de la pista, con el ancho de la misma.

d) Si el costo de construcción es de $25.00 por metro cuadrado, ¿Cuánto costaría construir una pista alrededor del parque de 10 metros de ancho?

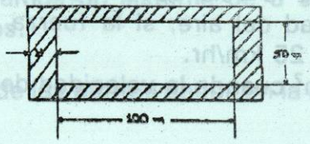


Figura 9

5) La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es 20cm. Calcular las longitudes de los catetos para que el área del triángulo sea máxima. ¿Cuál es el área máxima?
Calcula las longitudes de los catetos para que el área sea la mitad del área máxima calculada.

6) **El Hotelero**
Don Pedro es el dueño de un hotel de 60 habitaciones y sabe que si el precio del alquiler es de $200.00, se rentan todas las habitaciones, también sabe que si aumenta el precio, tendrá una habitación vacía por cada $5.00 de aumento en el precio.

a) ¿Cuál es el precio óptimo por habitación, para que la utilidad sea máxima?

b) ¿Cuántas habitaciones quedarían vacías?

c) Bosqueja la gráfica y señala en ella la parte de la misma que corresponde a la realidad que se analiza.

7.- **Fijación de Precio**
Por medio de un estudio de mercado, se determina que la demanda de cierto producto está dada por la siguiente ecuación:

$$D=(6000-30p)$$

donde "p" es el precio del producto

Se quiere determinar el precio del producto, que dé la mayor utilidad bruta y el número de unidades del producto que se necesita producir.
Bosqueja la gráfica.

8.- **Costo de Producción**
El costo de la producción de un artículo, esta dado en función del número de unidades producidas del mismo por la siguiente ecuación

$$C(x)=5-0.6x+0.02x^2$$

donde x es el número de unidades
Determina el número de unidades que se debe producir para que el costo de las mismas sea mínimo.
Bosqueja la gráfica.

9) **La fuerza del aire**

La fuerza del aire sobre la vela de un barco, está dada como función del cuadrado de la velocidad del aire, si la fuerza es de 50 NT/m^2, cuando la velocidad del aire es de 25 km/hr.

¿Cuál es la fuerza por m^2 cuando la velocidad del aire es de 50 km/hr ?

10) **El Agricultor**

Un agricultor de manzanas sabe que si siembra 100 árboles por hectárea, la producción promedio es de 130 kg de manzana por árbol, y por estudios que se han hecho, sabe que la producción promedio disminuye en 1 kg por cada árbol extra que se siembre por hectárea.

¿Cuál es el número óptimo de árboles por hectárea, para que la producción por hectárea sea máxima?

4.8 Ecuación de la función cuadrática a partir de su gráfica.

En el punto anterior, la ecuación de la función cuadrática se estableció relacionando las variables, bajo las condiciones establecidas en cada problema, sin embargo existen muchos casos donde es necesario establecer la ecuación de la función que relaciona las variables, a partir de datos contenidos en su gráfica, por ejemplo, cuando se diseña un puente colgante, la cortina de una presa o se analiza el movimiento de un cuerpo lanzado con cierto ángulo sobre el horizonte.

En seguida te mostraremos como hacerlo.

Objetivo:

Dadas las coordenadas de tres puntos de la gráfica, o las coordenadas del vértice y las de otro punto, encontrar la ecuación particular de la función.

Los puntos dados no deben estar en una misma línea recta, ni dos de ellos deben estar en una misma línea recta vertical.

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación particular de la función cuadrática que contiene los siguientes puntos:

(1;2), (-1;0), (2;9).

La ecuación general de la función cuadrática

$$y = ax^2+bx+c$$

tiene tres constantes, a, b y c, y son los valores que necesitamos establecer.

Cuando sustituimos las coordenadas de cada uno de los puntos dados en la ecuación

general, obtenemos una ecuación lineal en cada caso que relaciona las constantes buscadas, con las cuales formamos un sistema de 3 ecuaciones que al resolverlo obtenemos los valores buscados.

Si sustituimos las coordenadas de los puntos dados en la ecuación general obtenemos las siguientes ecuaciones:

1) $a + b + c = 2$
2) $a - b + c = 0$
3) $4a + 2b + c = 9$

Lo resolveremos por el método de suma y resta

1) $a+b+c=2$
2) $\underline{-1(a-b+c)=0(-1)}$
$2b = 2$
$b = 1$

Ahora

1) $(-1)(a+b+c)=2(-1)$
3) $\underline{4a+2b+c=9}$
$3a+b = 7$

si $b = 1$

$3a = 6$
$a = 2$

Conociendo el valor de a y b, sustituimos los valores en cualquiera de las ecuaciones y calculamos c.

1) $a+b+c=2$
$2+1+c=2$
$c=-1$

La ecuación particular buscada es:

$y=2x^2+x-1$

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación particular de la función cuadrática que contiene los siguientes puntos:

(0;-3), (2;5) y (1;0).

El primer punto son las coordenadas de la intersección y, es decir, si $x=0$, $y=-3$, por lo tanto conocemos que $c=-3$, así que solo nos falta encontrar a y b, para ello sustituimos en la ecuación general, las coordenadas de los otros dos puntos.

Si $c=-3$ $\quad y=ax^2+bx-3$