De la misma manera, si "a" es igual a "b", la propiedad conduce a un exponente cero. Por ejemplo:

$$\frac{x^3}{x^3}=x^{3-3}=x^0$$

Pero realmente la respuesta es 1, ya que cualquier número (excepto 0) dividido por sí mismo obtienes 1 como respuesta. De nueva cuenta, para hacer que la propiedad del cociente de dos potencias sea aplicable para todos los exponentes, es necesario definir x^0 igual a 1.

> Exponente 0
> $x^0=1$, siempre que $x\neq 0$

Los exponentes fraccionarios tienen un significado sorpresivo. Si la propiedad de una potencia elevada a otra potencia es válida para cualquier tipo de exponentes, entonces la siguiente proposición debe ser verdadera también:

$$(x^{\frac{1}{3}})^3=x^{(\frac{1}{3})(3)}=x^1=x$$

Por lo tanto, $x^{\frac{1}{3}}$ es un número que cuando se eleva al cubo, la respuesta es x. Pero observa que este hecho es exactamente la definición de "raíz cúbica". En general, la "raíz n-ésima" de x es un número que cuando se eleva a la n potencia obtienes x como respuesta. Esta discusión origina la definición de exponentes "recíprocos".

> Exponentes recíprocos
> $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$

La expresión $\sqrt{x}$ se le llama radical y se lee como:"la raíz n-ésima de x". Cada una de las partes de la expresión $\sqrt{x}$ tiene nombres específicos que debes de aprendértelos y usarlos

n ... índice de la raíz
x ... radicando
$\sqrt{}$ ... signo radical

Si el exponente de x es una fracción como $\frac{3}{4}$, y las propiedades son todavía válidas para este tipo de exponentes, entonces:

$$x^{\frac{3}{4}}=x^{(\frac{1}{4})(3)}=(x^{\frac{1}{4}})^3=(\sqrt{x})^3$$

Esto conduce a una definición general de exponentes fraccionarios

> Exponentes fraccionarios
> $x^{\frac{a}{b}}=(\sqrt{x})^a$
> donde "a" y "b" representan números enteros.

Con estas definiciones obtienes un significado preciso de potencias, cuyos exponentes son números racionales. Ya que un número irracional no puede expresarse como una razón entre dos enteros, todavía no se puede definir la exponenciación para exponentes irracionales. Sin embargo, puedes evaluar expresiones como 5^{π} ó $7^{\sqrt{3}}$ utilizando una calculadora y una aproximación para el exponente irracional.

El objetivo de esta sección es que te aprendas las definiciones de exponenciación para exponentes racionales, evaluando potencias y simplificando expresiones que involucren exponentes racionales.

Ejemplo 1

Evalúa $136^{\frac{3}{4}}$ de dos formas: primero como $(\sqrt[4]{136})^3=(136^{\frac{1}{4}})^3$, y después como $136^{0.75}$. Muestra que las dos respuestas son iguales.

Solución
Presiona en tu calculadora las siguientes teclas:

136 $\underline{y^x}$ 4 $\underline{1/x}$ $\underline{=}$ $\underline{y^x}$ 3 $\underline{=}$. El resultado es 39.82485...

Luego presiona

136 $\underline{y^x}$ 0.75 $\underline{=}$. El resultado es 39.82485...

Las dos respuestas son iguales. Esto confirma que $136^{\frac{3}{4}}=(136^{\frac{1}{4}})=(\sqrt[4]{136})^3$

Ejemplo 2

Evalúa $\sqrt[6]{85.766121}$ utilizando la definición de exponentes racionales. Verifica que tu respuesta es correcta, multiplicando.

Solución

$$\sqrt[6]{85.766121}=(85.766121)^{\frac{1}{6}}$$

La secuencia de teclas es:
85.766121 y^x 6 $1/x$ = . La respuesta es 2.1

Para verificar esta respuesta, multiplica: (2.1)(2.1)(2.1)(2.1)(2.1)(2.1). La respuesta es 85.766121.

Ejemplo 3

Simplifica: $\dfrac{(6x^{7}y^{-4}z^{0})^{3}}{9x^{2}y^{5}z^{-8}}$, dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos.

Solución:

$$\frac{(6x^{7}y^{-4}z^{0})^{3}}{9x^{2}y^{5}z^{-8}}$$

$$= \frac{216x^{6}y^{-12}z^{0}}{9x^{2}y^{5}z^{-8}}$$ Distribuye el exponente 3 en todos los factores del numerador.

$$= 24x^{-8}y^{-17}z^{8}$$ Divide los coeficientes y las potencias con la misma base.

$$= \frac{24z^{8}}{x^{8}y^{17}}$$ Aplica la definición de exponentes negativos.

Ejercicio 5-4

Realiza lo siguiente:

1. Evalúa 3^{-2} mentalmente, usando la definición de exponentes negativos. Luego evalúa 3^{-2} usando una calculadora. Muestra que las dos respuestas son iguales.

2. Utilizando la calculadora, evalúa $57^{\frac{1}{3}}$. Almacena la respuesta en la memoria de la calculadora. Después eleva al cubo la respuesta multiplicando (respuesta)(respuesta)(respuesta) para verificar la definición de potencias con exponentes recíprocos.

3. Evalúa $(\frac{1}{4})^{-3}$, primero usando la definición de exponentes negativos y luego elevando al cubo. Simplifica la respuesta lo más posible. Después evalúa $(\frac{1}{4})^{-3}$ directamente en la calculadora. Muestra que las dos respuestas son iguales.

4. Evalúa $\sqrt{789}$, primero escribiéndola como una potencia con un exponente fraccionario. Después evalúa $\sqrt{789}$ directamente con la tecla de raíz cuadrada (√) de tu calculadora. Muestra que son las mismas respuestas. También comprueba que si elevas al cuadrado cualquiera de las respuestas obtienes 789.

5. Lupita se equivocó al contestar una pregunta de un examen por decir que: $8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{8^{3}}$. Explica qué error cometió y cómo podría evitarlo en el futuro.

6. Problema del cero.
   a. Evalúa 0^{5}
   b. Evalúa 5^{0}
   c. Javier piensa que cualquier número elevado a la 0 potencia es igual a 1, y 0 elevado a cualquier potencia es igual a 0. Pero él desea saber a qué es igual 0^{0}, a 0 ó a 1. Díle la respuesta correcta.
   d. Sara tecleó en su calculadora 0^{-3} y obtuvo un mensaje de "error" como respuesta: ¿Qué debería recordar para explicar este resultado?

En los problemas del 7 al 10, evalúa el radical utilizando la definición de exponentes recíprocos. Verifica tu respuesta por multiplicación.

7. $\sqrt[5]{437}$ 8. $\sqrt[4]{99735}$

9. $\sqrt[7]{279936}$ 10. $\sqrt{73157}$

En los problemas del 11 al 20, utiliza las propiedades de los exponentes para simplificar la expresión. Escribe las respuestas sin exponentes negativos o nulos.

11. $(7x^{-3})(8x^{9})$ 12. $(4x^{3})^{2}(-2x^{-3}y^{-1})^{3}$

13. $(5x^{3}y^{-2})^{4}(5x^{-4}y^{-5})^{-2}$ 14. $(1001x^{-4}y^{-3}) \div (77x^{6}y^{-7})$

15. $\dfrac{x^{-5}yz^{-3}}{x^{-1}y^{-5}z}$ 16. $\dfrac{3^{4}x^{-7}y^{3}z^{-4}}{4^{3}x^{-4}y^{-5}z^{0}}$

17. $(13x^{7}y^{13})^{0}$ 18. $(5x^{-1/2})(6x^{1/8})$

19. $(64x^{2})^{\frac{1}{6}}(32x^{5})^{\frac{-2}{5}}$ 20. $\dfrac{x^{-4.3}y^{1.5}}{x^{-3.7}y^{-2}}$

5.5 Potencias y radicales sin calculadora

Haz aprendido cómo elevar números a potencias donde el exponente es un número racional, positivo o negativo. Es importante que desarrolles habilidad para realizar operaciones rápidamente (mentalmente, sin usar la calculadora), cuando los números son relativamente pequeños y su raíz es exacta.

El objetivo de esta sección es que evalúes rápidamente expresiones que contienen radicales o exponentes fraccionarios, usando la calculadora sólamente para verificar la respuesta.

Ejemplo 1

Evalúa $8^{\frac{2}{3}}$

Solución:

El proceso mental que debes seguir es algo como ésto: "La raíz cúbica de 8 es 2. Y 2 elevado al cuadrado es 4".

Para resolver este problema mentalmente, debes identificar que 8 es igual a 2^3, así que la raíz cúbica de 8 es 2.

Ejemplo 2

Evalúa $216^{\frac{4}{3}}$

Solución

Ya que la base 216, es relativamente grande, primero debes factorizarlo y expresarlo como el producto de potencias. Una manera de hacer ésto se muestra a continuación:

2) 216
2) 108
2) 54
3) 27
3) 9
3) 3
1

Este procedimiento se puede describir mejor como "sacar partes". 216 entre 2 es 108. El 108 se anota abajo del 216. Se continúa con este proceso, siempre dividiendo entre el número primo más pequeño que divida exactamente al cociente.

Los factores primos de 216 aparecen a la izquierda, afuera del signo de división. Así:

$$216 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^3$$

Para evaluar $216^{\frac{4}{3}}$, debes escribir:

$216^{\frac{4}{3}} = (2^3\cdot 3^3)^{\frac{4}{3}}$ Factoriza la base.

$= 2^4\cdot 3^4$ Distribuye el $\frac{4}{3}$

$= (16)(81)$

$= 1296$

Expresiones con radicales pueden algunas veces simplificarse sin la necesidad de extraer las raíces y trabajar con aproximaciones decimales. El procedimiento consiste en transformar los radicales a potencias con exponentes fraccionarios y luego usar las propiedades de los exponentes para hacer la simplificación.

Ejemplo 3

Simplifica $\sqrt[6]{256} \div \sqrt[4]{64}$

Solución:

$\sqrt[6]{256} \div \sqrt[4]{64}$

$= 256^{\frac{1}{6}} \div 64^{\frac{1}{4}}$ Convierte a la forma exponencial

$= (2^8)^{\frac{1}{6}} \div (2^6)^{\frac{1}{4}}$ Ya que $256 = 2^8$ y $64 = 2^6$

$= 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{3}{2}}$ Multiplica los exponentes y simplifica

$= 2^{-1/6}$ Resta los exponentes

$= \frac{1}{2^{\frac{1}{6}}}$ Definición de exponente negativo

La respuesta puede también escribirse en forma radical, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

Ejercicio 5-5

1. Tabla de potencias

Utilizando una calculadora cuando sea necesario, elabora una pequeña tabla de potencias de enteros. La tabla debe incluir desde 2^2 hasta 2^{10}, desde 3^2 hasta 3^6, desde 4^2 hasta 4^5, desde 5^2 hasta 5^4 y los cuadrados y cubos de los números: 6,7,8,9,10,11 y 12. No es necesario que memorices estos números, pero poder identificarlos debe ser parte de tu repertorio literario (o numérico) como estudiante de matemáticas.

En los problemas del 2 al 10, evalúa el radical mentalmente.

2. $\sqrt[3]{64}$ 3. $\sqrt[4]{81}$

4. $\sqrt[4]{625}$ 5. $\sqrt[3]{343}$

6. $\sqrt[3]{216}$ 7. $\sqrt[5]{32}$

8. $\sqrt[3]{512}$ 9. $\sqrt{1024}$

10. $\sqrt{625}$

En los problemas del 11 al 30, evalúa la potencia mentalmente. Escribe la respuesta como una fracción cuando sea necesario. Puedes verificar tus respuestas con la calculadora.

11. $64^{\frac{2}{3}}$ 12. $64^{\frac{3}{2}}$

13. $64^{-\frac{3}{2}}$ 14. $64^{-\frac{2}{3}}$

15. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ 16. $(-64)^{\frac{3}{2}}$

17. $-64^{\frac{2}{3}}$ 18. $-64^{\frac{3}{2}}$

19. $32^{-\frac{6}{3}}$ 20. $-32^{-\frac{6}{3}}$

21. $128^{\frac{2}{7}}$ 22. $256^{\frac{3}{4}}$

23. $81^{-\frac{3}{2}}$ 24. $243^{-\frac{4}{3}}$

25. $343^{\frac{2}{3}}$ 26. $36^{\frac{3}{2}}$

27. $-100^{-\frac{3}{2}}$ 28. $(\frac{9}{49})^{-3/2}$

29. $(-\frac{125}{27})^{-\frac{4}{3}}$ 30. $121^{\frac{1}{2}}$

En los problemas del 31 al 36, simplifica la expresión convirtiendo los radicales a la forma exponencial. Reporta la respuesta como un radical o como una potencia, no como una aproximación decimal. Puedes verificar tus respuestas usando la calculadora.

31. $\sqrt{6} \div \sqrt{2}$ 32. $\sqrt{72} \div \sqrt{9}$

33. $\sqrt{8} \div \sqrt[4]{32}$ 34. $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{9}$

35. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$ 36. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

En los problemas del 37 al 40, encuentra el valor de x. Debes tener cuidado al resolver estas ecuaciones, pues no se mostró ningún ejemplo.

37. $3^x = 243$ 38. $64^x = 4$

39. $49^x = 343$ 40. $512^x = 4$

5.6 Notación científica

Suponiendo que alguien te dice: "¡rápido!", "¿aproximadamente cuánto es 32,418X1934?" Piensa por un momento y luego respondes, "aproximadamente como 60 millones". El secreto de esta rápida operación mental es convertir los números a "notación científica". En esta sección aprenderás cómo.

Trata de evaluar 365^6 en tu calculadora. La mayoría de las calculadoras reportarán en la pantalla algo como esto:

2.3645973 15

que significa

2.3645973×10^{15}

el cual es una versión redondeada de la respuesta exacta,

2,364,597,285,765,625

En 2.3645973×10^{15} el punto decimal ha sido movido 15 lugares hacia la izquierda quedando entre los primeros dos dígitos del número, multiplicado por 10^{15} para compensar este movimiento. La calculadora redondea el número decimal a 2.3645973, o al número con los suficientes decimales que ajustan en su pantalla. Un número en esta forma se dice que está en notación científica.

Las dos partes de un número en notación científica tienen nombres especiales. El factor de la izquierda tiene el punto decimal después del primer dígito (diferente de cero) y es llamado "mantisa". El factor de la derecha es una potencia de 10 y su exponente es llamado "característica".

Característica

7.51×10^8 4.562×10^{-3}

Mantisa

> Notación científica
> Un número está en "notación científica", sí y sólo sí, está escrito en la forma
> característica
> mantisa X10
> donde la mantisa es un número entre 1 y 10 (incluyendo el 1, pero no el 10), y la característica es un entero que indica cuántos lugares ha sido corrido el punto decimal.

La cantidad de "dígitos significativos" de un número en notación científica es el número de dígitos que tiene la mantisa. Por ejemplo:

5.38×10^7 tiene 3 dígitos significativos

3.725×10^{-6} tiene 4 dígitos significativos

Los objetivos de esta sección son:

1. Transformar números a notación científica y viceversa
2. Multiplicar o dividir mentalmente números en notación científica para obtener una respuesta aproximada.

Ejemplo 1

Convierte los siguientes números en notación científica.

a. 3250000

b. 0.007814

Solución

a. Para colocar el punto decimal en el lugar deseado, debes moverlo de la derecha al final del número (dónde está, por implicación), hacia la izquierda, al espacio entre el 2 y el 3.

3 2 5 0 0 0 0.
↑
6 lugares

Esto requiere moverlo 6 lugares como se muestra arriba. Por lo tanto,
$3250000 = 3.25 X\ 10^{6}$

b. Para colocar el punto decimal en el lugar deseado debes moverlo 3 lugares a la derecha, entre el 7 y el 8

0. 0 0 7 8 1 4
↑
3 lugares

Por lo tanto,
$0.007814 = 7.814\ X\ 10^{-3}$

La parte complicada de estas transformaciones es decidir si el exponente es positivo o negativo. La forma más confiable para comprobar que la conversión la hiciste correctamente es multiplicando la mantisa por la potencia de 10, y debes obtener el número original.

> Signo del exponente en notación científica
> Si haces más pequeño un factor porque moviste su punto decimal, debes hacer más grande la potencia de 10 (incrementando su exponente), y viceversa, de tal manera que el número que obtengas como respuesta debe ser igual al número original.

Ejemplo 2
Multiplica $(3X10^{7})(4X10^{-18})$ mentalmente. Escribe la respuesta en notación científica.

Solución

$(3X10^{7})(4X10^{-18})$
$= 12X10^{-11}$ Multiplicando las mantisas y sumando las características
$= 1.2X10^{-10}$ Si disminuyes la mantisa, debes incrementar la característica.

Si la parte decimal de los números es extensa para efectuar la multiplicación o división mentalmente, puedes primero redondearlos a 1 dígito significativo y obtener una respuesta aproximada, o usar la forma de notación científica de la calculadora para obtener una respuesta exacta. En una calculadora para anotar un número como $5.941X10^{-8}$, debes utilizar la tecla "enter exponent", usualmente marcada como exp, eex, ee. La secuencia de teclas es

5.941 exp 8 +/-

Ejemplo 3

Divide $\dfrac{7.41\ X\ 10^{5}}{5.941\ X\ 10^{-8}}$

a. Aproximadamente, redondeando los números y dividiendo mentalmente.
b. Exactamente, usando la calculadora y redondeando el resultado apropiadamente.

Solución

a. $\dfrac{7.41\ X\ 10^{5}}{5.941\ X\ 10^{-8}} \approx 1\ X\ 10^{13}$

El proceso mental debe ser:"7.41 es cerca de 7. 5.941 es cerca de 6. 7 dividido entre 6 es cerca de 1. Restando los exponentes, 5-(-8) es 13. Así la respuesta es aproximadamente como $1\ X\ 10^{13}$".

b. $\dfrac{7.41\ X\ 10^{5}}{5.941\ X\ 10^{-8}}$

$= 1.247264 \ldots X\ 10^{13}$ Usando la calculadora
$\approx 1.25\ X\ 10^{13}$ Redondeando el resultado

Los números en notación científica son considerados generalmente como aproximaciones decimales. Por lo tanto, los resultados a los problemas de multiplicación o división no pueden ser más exactos que la menor exactitud de los números. Por este motivo la respuesta del Ejemplo 3 fue redondeada a tres dígitos significativos.

> Redondeo de números en la multiplicación o división
> El resultado a un problema de multiplicación o división que involucra números aproximados, deberá ser redondeado a la cantidad de dígitos significativos del factor de menor exactitud del numerador y denominador.

Observa que las palabras "preciso" y "exacto" tienen significados diferentes.

En el Ejemplo 3, por ejemplo, el 1.247264 es un valor más preciso del cociente que el 1.25. Pero no necesariamente más exacto. Exactitud se refiere a qué tan cera concuerda una respuesta con una cantidad del mundo real en la que se realizó una medida, y depende de la exactitud de las cantidades que intervienen. Y precisión se refiere sólamente a qué tan cerca ajusta una respuesta para los dos números que fueron utilizados en el cálculo de una operación.

Ejercicio 5-6
En los problemas de 1 al 5, transforma el número a notación científica.

1. 57200
2. 0.000542
3. 98.3
4. 0.999
5. 467 millones