Las propiedades de los logaritmos te permiten resolver ecuaciones exponenciales sin la necesidad de sustituir la base por una potencia de 10. Probablemente ya te habías dado cuenta de este hecho en el problema 22 del Ejercicio 5-9.

Ejemplo 3.
Resuelve la ecuación: $7^x=83$, aplicando el *log* a cada miembro y utilizando la propiedad del logaritmo de una potencia.

Solución:

$7^x=83$

$\log 7^x=\log 83$

$x \log 7=\log 83$ Log de una potencia.

$x=\dfrac{\log 83}{\log 7}$ Divide entre $\log 7$.

$x=2.270834...$

La respuesta es adecuada. Pues $7^2=49$, $7^3=343$, y 83 está entre 49 y 343. Por lo tanto,
S={2.270834...}

Ejercicio 5-10
En los problemas del 1 al 3, muestra que la propiedad es válida, evaluando ambos miembros de la ecuación.

1. $\log(9\cdot 5)=\log 9+\log 5$ 2. $\log(51\div 3)=\log 51-\log 3$
3. $\log(5^4)=4(\log 5)$

En los problemas del 4 al 15, encuentra los siguientes logaritmos sin usar la tecla "*log*" de tu calculadora. Considera que $\log 2 \approx 0.301$ y que $\log 3 \approx 0.477$

4. $\log 6$ 5. $\log(\frac{3}{2})$
6. $\log 27$ 7. $\log 36$
8. $\log 16$ 9. $\log 2^{100}$
10. $\log 1000$ 11. $\log 2000$
12. $\log 4000$ 13. $\log 6000$
14. $\log 8000$ 15. $\log(3x10^3)$
16. ¿Qué patrón advertiste en las respuestas del 11 al 15?

En los problemas del 17 al 22, escribe la expresión como un logaritmo único con un sólo argumento.

17. $\log_7 3+\log_7 8$ 18. $\log_5 12-\log_5 3$
18. $\log_{11} 6+\log_{11} 5+\log_{11} 4$ 20. $\log_2 225+\log_2 3-\log_2 15$
21. $3\log_5 4$ 22. $4\log_8 3-\log_8 27$

- En los problemas del 23 al 25, resuelve la ecuación aplicando logaritmos a cada miembro y luego utilizando la propiedad del logaritmo de una potencia.

23. $13^x=908$ 24. $0.7^{3x}=21.9$
25. $7.38 \times 10^{0.4x}=44.1$

26. Antes de que existieran las calculadoras, los logaritmos ofrecían una manera eficiente para multiplicar varios números juntos, como

(317)(22.4)(7810)(4.9)

En los años 1600s, el matemático inglés Henry Briggs recopiló en una tabla logaritmos de base 10 (llamados logaritmos "comunes"). Con esta tabla, era posible buscar los logaritmos de cada uno de los factores y sumarlos. La ventaja era de que una multiplicación se podía resumir a una suma de logaritmos y toda la operación se realizaba al mismo tiempo, en una misma columna, pues la multiplicación hecha con "papel y lápiz" solamente se puede efectuar tomando dos factores a un tiempo. El procedimiento consistía en esto:

factores	logs
317	2.5011
22.4	1.3502
7810	3.8927
4.9	0.6902
	---
suma....	8.4342

La respuesta es igual a $10^{8.4342}$ (por definición de logaritmo). Luego usando la misma tabla, pero en forma contraria a la anterior, uno encuentra que $10^{0.4342}$ es como 2.72. Por lo tanto, la respuesta en notación científica es aproximadamente $2.72x10^8$, (Con una calculadora, puedes tranquilamente comprobar que el resultado de la multiplicación anterior es $2.717405...x10^8$).

Las partes de un logaritmo reciben nombres específicos. Por ejemplo, en la igualdad

$\log 317 \approx 2.5011$,

al 2 se le llama característica del logaritmo. Es la misma que la característica del número cuando está escrito en notación científica ($3.17x10^2$). Al .5011 se le llama mantisa del logaritmo. Es la misma que el logaritmo de la mantisa, el 3.17 en notación científica. El argumento, 317, se le llama antilogaritmo de 2.5011, o simplemente antilog.
La tabla de logaritmos de Brigg's la encuentras al final del texto. En la tabla se entra con el 3.17, observa que solamente aparecen las mantisas y que los puntos decimales han sido omitidos por simplicidad. Se espera que uno determine el valor de la característica (para este caso, es 2).

Contesta las siguientes preguntas.

a. Busca en la tabla de logaritmos los otros tres logaritmos: $\log 22.4$, $\log 7810$ y $\log 4.9$, mostrados anteriormente. Asegúrate de conocer dónde encontrar la mantisa y cómo determinar el valor de la característica.
b. Encuentra la forma de cómo usar la tabla de logaritmos a la inversa para determinar que el antilog de 0.4330 es 2.71.
c. Muestra que ya aprendiste a usar la tabla de logaritmos y encuentra el valor aproximado de: (79.2)(37,400)(409)

27. Muchas calculadoras no pueden trabajar con números demasiado grandes o que tienen exponentes mayores de 99. Sin embargo, puedes evaluar estas potencias si en la calculadora encuentras el logaritmo de la respuesta. Sigue la indicación para efectuar lo siguiente:

a. Evalúa 1776^{53}
b. Evalúa 2083^{97}
c. 0.007^{105}
d. Si 854^{231} fuera evaluado exactamente, ¿cuántos dígitos tendría la respuesta?
e. Si 0.2^{1000} fuera evaluado exactamente, ¿cuántos ceros existirían entre el punto decimal y el primer dígito distinto de cero?

28. La cantidad de energía Richter de un temblor de tierra está determinada por el logaritmo base 10 de la intensidad (amplitud de vibración del temblor). El temblor que ocurrió en la Cd. de San Francisco en abril'65 midió 7 en la escala de Richter. El temblor de la Cd. de México en sep'85 midió cerca de 8.25 en la escala de Richter. Para una persona que conoce poco acerca de los logaritmos, 8.25 no le representa mucha diferencia con respecto a 7. Utilizando tus conocimientos acerca de logaritmos, determina cuántas veces fue más intenso el temblor de la Cd. de México que el de la Cd. de San Francisco.

29. La intensidad del sonido es medida en decibeles. La cantidad de decibeles es 10 veces el logaritmo base 10 de la potencia acústica relativa de las sondas sonoras. Un sonido estándar débil que tiene la fuerza suficiente para ser escuchada tiene una potencia acústica relativa de 1.

Calcula aproximadamente la intensidad en decibeles de los siguientes sonidos:

Sonido	Potencia acústica relativa
a. Un susurro	125
b. Música suave	4000
c. Nivel normal de la voz	12000
d. Avión (jet)	2.3×10^{12}

e. Si un género de música fuerte, "heavy metal", tiene una intensidad de 118 decibeles; encuentra su potencia acústica relativa.

30. La acidez de una solución es medida por su pH ("potencial de hidrógeno"). El pH es el "negativo" del logaritmo base 10 de la concentración del ión-hidrógeno en moles por litro (H^+).

$$pH = -\log(H^+)$$

a. Encuentra el pH de las siguientes sustancias:

Solución	concentración de iones-hidrógeno
Agua natural	1.0×10^{-7}
Leche	4.0×10^{-7}
Sangre humana	6.3×10^{-8}
Jabón de lejía	9.2×10^{-12}

b. Si el pH del vino es 3.3, encuentra su concentración de iones-hidrógeno.

c. Si el pH del tomate es 4.2, encuentra su concentración de iones-hidrógeno. ¿Son los tomates más o menos ácidos que el agua natural?

5.11 Demostración de las propiedades de los logaritmos

En la sección anterior aprendiste tres propiedades de los logaritmos. En esta sección las demostrarás formalmente y también aprenderás otras propiedades, algunas de ellas, serán de mucha utilidad en las aplicaciones al mundo-real.

El objetivo principal de esta sección es derivar otras propiedades de los logaritmos, y probar su veracidad.

La primera propiedad que derivarás proviene del problema de transformar un logaritmo con una base a un logaritmo con otra base.

Ejemplo 1.
Encuentra aproximadamente el valor de $log_2 45$.
Solución:
La manera de resolver este problema es convirtiéndolo a la forma exponencial. Si $x = log_2 45$, entonces

$2^x = 45$	Definición de logaritmo.
$log\ 2^x = log 45$	Saca el logaritmo base 10 a cada miembro.
$x\ log 2 = log 45$	Log de una potencia.
$x = \frac{log\ 45}{log\ 2}$	Divide entre $log 2$.
$log_2 45 = \frac{\log 45}{\log 2}$	Sustituye la x.

$log_2 45 = 5.491853...$
Comprueba con la calculadora: $2^{5.491853...} = 45$

La propiedad aparece arriba, antes de la evaluación (el penúltimo paso). Observa que la propiedad te servirá para representar en base 10 los logaritmos de otras bases.

$$log_2 45 = \frac{\log 45}{\log 2}$$

Una forma rápida para encontrar el logaritmo base 2 de 45 es: encontrar el logaritmo base 10 de 45 y luego dividirlo entre el logaritmo base 10 de 2. Este es un ejemplo de la Propiedad del "Cambio de base".

Propiedad del cambio de base de un logaritmo

$$log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En el ejemplo 2 verás cómo se demuestra una de las tres propiedades de los logaritmos de las secciones anteriores.

Ejemplo 2.

Demuestra que: $log_b(xy)=log_b x+log_b y$.
Demostración:
Si $m=log_b x$ y $n=log_b y$, entonces
$b^m=x$ y $b^n=y$ Por definición de logaritmo.

Si multiplicas x por y y traspones los miembros de la igualdad, obtienes

$$b^m b^n=xy$$
$$b^{(m+n)}=xy$$

Así que:

$m+n=log_b(xy)$ Por definición de logaritmo.

Por lo tanto,

$log_b(xy)=log_b x+log_b y$ Por simetría y sustitución.

Ejercicio 5-11
En los problemas 1, 2 y 3, encuentra el valor del logaritmo.
1. $log_7 28$ 2. $log_4 563$ 3. $log_5 78125$

En los problemas 4, 5 y 6, demuestra las siguientes propiedades especiales:
4. $log_b 1=0$ 5. $log_b b=1$ 6. $log_b 0$ es indefinido

En los problemas del 7 al 10, simplifica la expresión.

7. $log_9 9^8$ 8. $3\log_4 4^{\frac{-2}{3}}$

9. $5^{\log_5 7}$ 10. $10^{\log 5}$

11. Hay una tecla en tu calculadora marcada como **ln**. La "*l*" es por "logaritmo" y la "*n*" es por "natural" o"Naperianos" (en honor al matemático escocés John Napier). En este problema investigarás los logaritmos naturales.
   a. Encuentra $ln2$ y $ln3$.
   b. Una de las propiedades especiales de los logaritmos es que: $log_b b=1$. Si puedes encontrar un número b, *tal que* $lnb=1$; ese número es la base de los logaritmos naturales. Encuentra una aproximación con tres lugares decimales para esta base.
   c. La base de los logaritmos naturales es un número trascendental llamado e. Para encontrar un valor más preciso de e, anota 1 en tu calculadora y luego presiona la tecla e^x. La respuesta en el inciso b debe estar muy cerca del valor.
12. Demuestra la propiedad del logaritmo de un cociente.
13. Demuestra la propiedad del logaritmo de una potencia.

En los problemas del 14 al 19 se presentan algunas propiedades poco comunes de logaritmos. Demuestra cada propiedad.

14. "Cambio de Base"
$$log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

15. "Proporcionalidad Directa"
$log_a x=(c)(log_b x)$, donde c es una constante.

16. "Producto de dos Logaritmos"
$$(log_a b)(log_b c)=log_a c$$

17. "Recíproco"
$$log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

18. "Base con una Potencia"
$$\log_{(b^n)} x=\frac{1}{n}\log_b x$$

19. "Base y Argumento con una Potencia"
$$\log_{(b^n)}(x^n)=\log_b x$$

20. La propiedad de "Proporcionalidad Directa" del problema 15, ofrece una forma rápida para encontrar logaritmos de otras bases.
   a. En el problema 11 aprendiste el significado de $log_e x$, donde e = 2.7182818284... Encuentra el valor de la constante que debe multiplicar al $log_{10} x$ para obtener ln en la respuesta.
   b. Verifica que tu respuesta en el inciso "a" es correcta, evaluando "$ln5$" de dos formas; multiplicando la constante por $log5$ y directamente en la calculadora utilizando la tecla **ln**.
   c. ¿Cómo encontrarías el valor de $log17$, si sabes que $ln17=2.833213...$?

5.12 Las funciones exponenciales como modelos matemáticos.

La ecuación general de una función exponencial es

$$f(x)=axb^x,$$

donde a y b son valores constantes. En las secciones anteriores has aprendido cómo encontrar y cuando el valor de x es dado, y cómo encontrar x cuando el valor de y es dado. En esta sección aprenderás una propiedad que te permitirá, primero, a calcular muchos valores de y rápidamente, también analizar los datos dados para ver si corresponden a los de una función exponencial y después, a encontrar la ecuación particular para poder así determinar el modelo matemático.
Considera que la ecuación particular de una función exponencial es

$$f(x)=3x2^x$$

La tabla de valores se muestra a continuación

x	$f(x)$
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
5	96

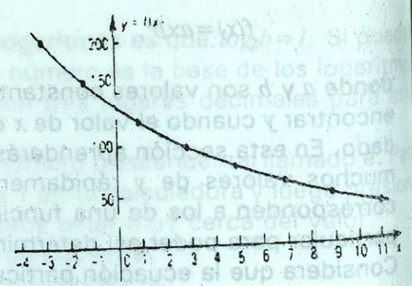
Cada vez que se "suma" 1 a x, el valor de $f(x)$ se "multiplica" por 2. Este hecho no debe sorprenderte porque el exponente x, te dice cuántos 2's se multiplican juntos. En general, sumar una constante al valor de x en una función exponencial tiene el efecto de multiplicar $f(x)$ por una constante diferente. Para la función anterior, sumar 2 a la x implica que $f(x)$ se tiene que multiplicar por 4.

> Propiedad de la suma-multiplicación de una función exponencial
>
> Si $f(x)=axb^x$, entonces $f(x+c)=f(x)xb^c$
> (Sumar una constante al valor de x, entonces $f(x)$ se tiene que multiplicar por una constante diferente).

Ejemplo 1.
Considera que $f(x)$ varía exponencialmente con x, si $f(3)=100$ y $f(5)=80$. Calcula valores de $f(x)$ y úsalos para trazar la gráfica de f.

Solución:
Observa que la función es exponencial, así que puedes usar la propiedad de la suma-multiplicación. También, que x se incrementa en 2 (va de 3 a 5). Luego, ¿Porqué factor tienes que multiplicar el 100 para obtener 80? La respuesta es 0.8. Para entrar en la tabla de abajo, cuando x se incrementa en 2, el valor de $f(x)$ se encuentra multiplicando el valor precedente por 0.8. Cuando x se decrementa en 2, el valor de $f(x)$ se encuentra dividiendo entre 0.8 el valor anterior.

x	$f(x)$
3	100
5	80
7	64
9	51.2
11	40.96
1	125
-1	156.25
-3	195.31



Ejemplo 2.
Considera que el número de bacterias por milímetro cuadrado en un cultivo en el laboratorio de biología se incrementa exponencialmente con el tiempo. El martes hay 2000 bacterias por milímetro cuadrado. El jueves, el número se incrementó a 4500.

a. Deriva la ecuación particular.
b. Predice el número de bacterias por milímetro cuadrado que tendrá el cultivo el martes de la siguiente semana.
c. Predice el tiempo que tardarían en reproducirse hasta llegar a 10,000 bacterias por milímetro cuadrado.
d. Traza la gráfica de la función.

Solución:
a. Si N es el número de bacterias por milímetro cuadrado, t es el tiempo (en días) desde el Martes, como N varía exponencialmente con t, la ecuación general es,

$$N=axb^t,$$

y los pares ordenados dados son (0,2000) y (2,4500).
Sustituyendo (0,2000) en la ecuación general, obtienes que:

$$2000=axb^0$$
$$2000=a$$

Sustituyendo 2000 por a y (2,4500) en la ecuación general, obtienes:

$$4500=2000xb^2$$

Para despejar la b, primero divide entre 2000, y luego eleva cada miembro a la $\frac{1}{2}$

$$\frac{4500}{2000}=b^2$$
$$2.25=b^2$$
$$(2.25)^{1/2}=(b^2)^{1/2}$$
$$1.5=b$$

Por lo tanto, la ecuación es

$$N=2000x1.5^t$$

b. Para el próximo martes, t será igual a 7, entonces

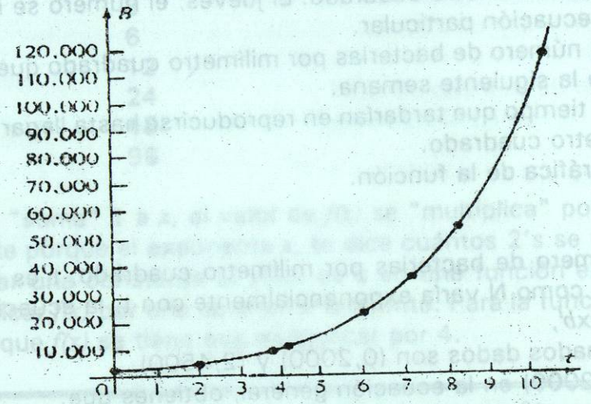
$$N=2000x1.5^7=34171.87... \approx 34,000 \text{ bacterias/mm}^2$$

c. Sustituye 10000 por N. Para obtener t, debes sacar logaritmo a cada miembro de la ecuación resultante, pues t es un exponente. Pero primero, ordena un poco la ecuación.

$$10,000=2,000x1.5^t$$
$$5=1.5^t$$
$$log5=log(1.5^t)$$
$$log5=t(log1.5)$$
$$\frac{\log 5}{\log 1.5}=t$$
$$3.9693...=t$$
$$t \approx 4 \text{ días}$$

Aproximadamente el sábado (como en 4 días después), el cultivo tendría 10,000 bacteria/mm^2

d. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Ejercicio 5-12

En los problemas del 1 al 4, considera que f es una función exponencial con los dos valores dados. Utiliza la propiedad de las funciones exponenciales para calcular otros cuatro valores de $f(x)$, para dos valores mayores de x y para dos valores menores de x. Luego úsalos para trazar la gráfica.

1. $f(2)=36$ y $f(5)=54$
2. $f(3)=20$ y $f(7)=24$
3. $f(4)=100$ y $f(6)=70$
4. $f(1)=50$ y $f(3)=20$
5. ¿Cuáles de las siguientes funciones, podrían ser una función exponencial? ¿Porqué las otras no lo son?

a.		b.		c.		d.	
x	$f(x)$	x	$g(x)$	x	$h(x)$	x	$k(x)$
1	12	5	20	7	1.73	7	1.73
4	48	10	40	13	6.40	13	6.40
7	192	15	60	19	25.12	19	23.68
10	768	20	80	25	82.47	25	87.63

6. Considera que la población del país se incrementa exponencialmente con el tiempo. El censo de 1980 mostró que la población era cerca de 82 millones de habitantes. El censo de 1990 mostró que la población se incrementó a 100 millones aproximadamente.
   a. ¿Cuál fue el factor de crecimiento de la población de 1980 a 1990? Utiliza este factor y las propiedades de las funciones exponenciales para predecir los resultados de los censos del 2000, 2010 y 2020.
   b. Traza la gráfica de población contra tiempo desde 1980 a 2020.
   c. Encuentra la ecuación particular expresando la población en términos del número de años que han transcurrido desde 1980.
   d. Utiliza la ecuación anterior para predecir la población este año. Verifica tu respuesta en la gráfica del inciso "b".
   e. Predice el año en que el país alcanzará una población de 200 millones.

   f. De acuerdo a tu modelo matemático, ¿Cuál era la población del país cuando estalló la Revolución Mexicana (en 1910)? Verifica el dato en una enciclopedia y explica cualquier diferencia que puedas observar.

7. Pedro Garza está conduciendo su automóvil en línea recta en una autopista nivelada a 64 kilómetros por hora (Km/hr), cuando en ese momento se le agota la gasolina a su carro. A pesar de que no pisa el pedal del freno, tampoco le responde el acelerador y su velocidad disminuye exponencialmente con el número de segundos desde que se le acabó el combustible, cayendo a 48 Km/hr después de 10 segundos.
   a. Escribe la ecuación particular expresando la velocidad en términos del tiempo.
   b. Predice la velocidad de Pedro después de 25 segundos.
   c. ¿En cuánto tiempo Pedro reducirá su velocidad a 10 Km/hr?
   d. Traza la gráfica de la función con un dominio desde 0 hasta el tiempo cuando Pedro alcanzó los 10 Km/hr.
   e. Explica porqué este modelo matemático no obtiene respuestas adecuadas cuando el tiempo toma valores muy grandes.

8. Considera que el número de horas que la leche permanece fresca decrece exponencialmente con la temperatura. Supón que la leche dentro del refrigerador a 0° C, se conservará por 192 horas, y que afuera del refrigerador en la cocina a 20° C, se conservará solamente por 48 horas.
   a. Si h es el número de horas que la leche se conserva fresca y t es la temperatura en grados centígrados. Escribe la ecuación particular expresando h en términos de t.
   b. A partir de la ecuación determina cuanto tiempo se conservará en buen estado la leche, en el patio de la casa en un día caluroso a 35° C.
   c. Aplicando la propiedad de las funciones exponenciales predice h para las temperaturas de 40° C, 60° C y 80° C.
   d. Traza la gráfica de h contra t, para valores de t desde 0 a 80.

9. Sandra García, accidentalmente inhaló un gas insecticida venenoso. Veinte horas después, al no sentirse bien, decidió consultar con un doctor. Del análisis de sangre, el midió una concentración de veneno de 0.00372 miligramos por centímetro cúbico (mg/cc) e inmediatamente la internó en el hospital. Ocho horas después, en un segundo análisis se le encontraron 0.00219 mg/cc.
   a. Si C es la concentración de veneno en su sangre en mg/cc y t son las horas que han transcurrido desde el primer análisis, determina la ecuación particular de esta función, considerando que C es eliminado por la misma sangre exponencialmente con respecto a t.
   b. El doctor le dice a Sandra, que pudo tener serias consecuencias si la concentración hubiera sido superior a 0.015 mg/cc. Basados en tu modelo matemático, ¿Cuál fue la C inmediatamente después del accidente?
   c. Ella será dada de alta del hospital cuando su C halla bajado hasta 0.00010 mg/cc. ¿En cuánto tiempo volverá a realizar sus actividades normales?
   d. Traza la gráfica de C contra t, desde el tiempo que inhaló el gas hasta el tiempo que salió del hospital.