$$= \frac{1}{[(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}]} \cdot \frac{[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}$$ Multiplicando por su conjugado

$$= \frac{[(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}]}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$ Realizando operaciones

$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ Multiplicando por $\sqrt{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}}{2\sqrt{4}}$$ Realizando operaciones

$$= \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Verifica con tu calculadora $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

$\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} =$

21. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

22. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

Para los problemas 23 y 24, el denominador es un suma y diferencia de dos cubos.

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

usando exponentes fraccionario, puedes escribir x + y como:

$$x + y = (x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$$
$$x - y = (x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$$

Usa este producto para encontrar de forma hábil el 1, por el cual se multiplica cada una de las siguientes expresiones y racionaliza el denominador.

23. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}}$

24. $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}$

Para los problemas 25 al 28 la expresión tiene la forma $\sqrt{x \pm \sqrt{y}}$. Expresiones como ésta, pueden ser transformados como $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ Por ejemplo:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Eleva al cuadrado ambos miembros de la ecuación $8+2\sqrt{15} = x+2\sqrt{xy}+y$

obteniendo dos ecuaciones con dos variables, la primera $x+y=8$ y la segunda $2\sqrt{xy}=2\sqrt{15}$, donde $xy=15$.

De la primera ecuación se despeja y

$$y=8-x,$$

se sustituye en la segunda ecuación, resultando

$$x(8-x)=15$$

distribuye "x" e iguala la ecuación a 0.

$$x^2-8x+15=0$$

factorizando obtienes:

$$(x-3)(x-5)=0$$

$x=3$ y $x=5$, sustituyendo en $y=8-x$

del cual tenemos $y=5$ y $y=3$, entonces $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$

Usa esta técnica para expresar lo siguiente como $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

25. $\sqrt{7+2\sqrt{16}}$

26. $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$

27. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$

28. $\sqrt{101-28\sqrt{13}}$

29. a) Resuelve $x^2-1{,}000{,}000x+1=0$, usando la fórmula cuadrática.

b) Muestra que $\sqrt{b^2-4ac}$ está tan cercano a "b" que el numerador de una solución se redondea a 0.

c) Racionaliza el denominador de la solución del inciso b) y obtén una expresión decimal diferente de 0.

30. Problema de la existencia de números irracionales.

Como recordarás, un número irracional es un número real que no puede ser escrito como la razón de dos enteros, ya que si un número de éstos podía existir, era incomprensible para la mayoría de los matemáticos.

Pero ahora es más fácil comprender estos números irracionales, como $\sqrt{2}$. Es fácil mostrar que un número racional como el 1.414 no es exactamente a $\sqrt{2}$, si se eleva al cuadrado, obtienes:

$(1{,}414)^2 = 1.99936$

el cual es muy cercano al 2, pero no igual

Una manera más común de hacer la prueba es como sigue:

$1.414 = \frac{1414}{1000}$ Escribe l.414 como la razón de dos enteros

$1.414 = \frac{707}{500}$ **Cancela todos los factores comunes**

$1.414 = \frac{7 \cdot 101}{2^2 \cdot 5^3}$ **Da los factores primos del numerador y denominador.**

No hay factores comunes que cancelar.

$(1.414)^2 = \left(\frac{7 \cdot 101}{2^{13}}\right)^2$ **Eleva al cuadrado**

$(1.414)^2 = \frac{7^2 \cdot 101^2}{2^4 \cdot 5^6}$ **No hay aún factores comunes en el numerador y denominador**

Como no se puede cancelar nada en el lado derecho, la fracción no podría ser un entero. Así que no es igual a 2. No importa con que número racional empieces aproximaciones de $\sqrt{2}$, si no es un entero antes de que eleves al cuadrado después tampoco lo sería.

Elevar al cuadrado una fracción no te introduce a nuevos factores que podrías cancelar. La raíz cuadrada perfecta de 64 es por supuesto un entero. Pero la raíz cuadrada de cualquier entero que esté entre dos enteros es un número irracional.

Conclusión

Radicales irracionales

Si x es un entero positivo, entonces $\sqrt{x}$ es cualquiera de los dos casos siguientes:

a) Un entero

b) Un número irracional si está entre dos enteros

a) Muestre que cada aproximación decimal, es más cercano al radicando, elevando al cuadrado o al cubo. Después escribe la aproximación decimal como la razón de dos enteros como se hizo en el inciso de este problema. Sacando los factores primos del numerador y numerando y concluir que el número racional no puede ser igual al radical.

i $\sqrt{22} \approx 4.69$

ii $\sqrt{4} \approx 1.587$

b) Muestra que el radical es un número racional, porque es un entero, o un número irracional porque está entre dos enteros.

i $\sqrt{53}$ *ii* $\sqrt{625}$ *iii* $\sqrt{3}$

7.4 Ecuaciones con radicales

Como el nombre lo indica, una ecuación radical es una ecuación con un radical en ella.

Por ejemplo:

$7 = x + \sqrt{x-1}$, es una ecuación radical. Hay ecuaciones como $x + \sqrt{3} = 7$ que tienen radicales pero no son ecuaciones radicales porque no tienen la variable bajo un signo radical.

Definición:

Una ecuación radical, es una ecuación en la cual una variable aparece bajo un signo radical.

Objetivo:

Dada una ecuación radical, encontrar su solución, descartando cualquier solución extraña.

Las ecuaciones radicales pueden surgir en el estudio de funciones, cuando se debe buscar x con el valor de y dado. Por ejemplo, si $y = x + \sqrt{x+1}$, y se da que $y = 7$, tendríamos $7 = x + \sqrt{x+1}$, las soluciones de esta ecuación serían los valores de x para las cuales $y = 7$

Ejercicio 1

Resolver $7 = x + \sqrt{x-1}$

Solución

Primer paso es necesario aislar el radical en un lado de la ecuación y elevar al cuadrado ambos miembros.

$7 - x = \sqrt{x-1}$	Aisla el radical
$(7-x)^2 = (\sqrt{x-1})^2$	Eleva al cuadrado ambos miembros
$49 - 14x + x^2 = x - 1$	Realizando operaciones
$x^2 - 15x + 50 = 0$	Igualando a cero la ecuación
$(x-10)(x-5) = 0$	Factorizando
$x = 10 \quad x = 5$	

Sustituyendo estos valores para x en la ecuación original, tendrás una ¡sorpresa!

Cuando $x=10$

$7=10+\sqrt{10-1}$

$7=10+\sqrt{9}$

$7=10+3$

$7\neq 13$

Cuando $x=5$

$7=5+\sqrt{5-1}$

$7=5+\sqrt{4}$

$7=5+2$

$7=7$

Donde ¡ 5 sí es solución, pero 10 no lo es ! La razón es porque elevar al cuadrado cada miembro de la ecuación es "irreversible", que guía a una solución extraña algunas veces. La solución extraña ocurre esta vez porque hay dos ecuaciones distintas

$7-x=\sqrt{x-1}$ y $7-x=-\sqrt{x-1}$

Que al elevar al cuadrado produce la misma ecuación polinominal $49-6x+x^2=x-1$.

El 5 es solución de la ecuación de la izquierda y 10 es solución de la ecuación de la derecha. Así que cuando se tenga que elevar al cuadrado cada miembro de la ecuación debes de verificar las soluciones y descartar cualquiera que sea extraña. En este caso 10 es una solución extraña.

$x=5$ y $x=10$ Solución extraña

5 = {5}

Ejemplo 2

Resuelve $\sqrt{x^2+5x-5}+\sqrt{x^2+x-2}=1$

En este caso la ecuación contiene dos radicales. Aisla uno de ellos en un miembro de la ecuación, obteniendo

$\sqrt{x^2+5x-5}=1-\sqrt{x^2+x-2}$

Eleva al cuadrado cada miembro de la ecuación

$x^2+5x-5=1-2\sqrt{x^2+x-2}+x^2+x-2$

La cual se transforma a:

$4x-4=-2\sqrt{x^2+x-2}$

Divide todo por 2

$2x-2=-\sqrt{x^2+x-2}$

Eleva al cuadrado nuevamente ambos miembros de la ecuación

$4x^2-8x+4=x^2+x-2$

Igualando a cero la ecuación y resolviendo la ecuación dada, tenemos

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2$ ó $x=1$

Sustituyendo los valores en la ecuación original tenemos:

Cuando $x=2$

$\sqrt{x^2+5x-5}+\sqrt{x^2+x-2}=1$

$\sqrt{4+10-5}+\sqrt{4+2-2}=1$

$\sqrt{9}+\sqrt{4}=1$

$3+2=1$

$5\neq 1$

Cuando $x=1$

$\sqrt{x^2+5x-5}+\sqrt{x^2+x-2}=1$

$\sqrt{1+5-5}+\sqrt{1+1-2}=1$

$\sqrt{1}+\sqrt{0}=1$

$1+0=1$

$1=1$

Donde la solución es: x = 1

S = {1}

Te sugiero que al resolver una ecuación con radicales, sigas los siguientes pasos para transformar y resolver ecuaciones con radicales.

1. Escribe la ecuación
2. Aisla un radical en un miembro de la ecuación
3. Eleva al cuadrado ambos miembros de la ecuación
4. Si aún hay radicales repite los pasos 2 y 3 hasta que quede libre de radicales
5. Resuelve la ecuación polinominal
6. Verifica las soluciones y descarta las extrañas
7. Escribe la solución

Ejercicio 7-4

Los siguientes problemas tratan de recordar tus conocimientos.

P1. Evalúa $\sqrt[4]{81}$

P2. Resuelve $\sqrt{x}=16$

P3. Evalúa $|-49|$

P4. Escribe en términos de i: $\sqrt{-36}$

P5. Dibuja la gráfica: $y=3x$

P6. ¿ Cuántos metros hay en un kilómetro ?

P7. Si cada semilla de un paquete de 2000 semillas, tienen un 70% de probabilidad de germinar. ¿Qué número de plantas crecerán si todo el paquete es sembrado?

P8. Escribe la ecuación general, de la función variación del inverso de un cuadrado.

P9. Evalúa el determinante:

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

P10. Encuentra el $\log_{10} 81$

Encuentra la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{3x-5}=4$
2. $\sqrt{x-2}=2$
3. $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-10}=0$
4. $\sqrt{x+5}-1=\sqrt{x}$
5. $\sqrt{x^2-9}=4$
6. $x-2=\sqrt{x-2}+12$
7. $\sqrt{-3x-14}-x=4$
8. $x-\sqrt{6-x}=4$
9. $\sqrt{3x+10}-4=x$
10. $\sqrt{7-6x}+3x=2$
11. $\sqrt{x}+\sqrt{7}=\sqrt{x=7}$
12. $\sqrt{2x+25}-2\sqrt{x+4}=1$
13. $x^2=21-\sqrt{x^2-9}$
14. $\sqrt{x^2-4x-12}-\sqrt{x^2-4x-5}=1$
15. $2\sqrt{x}-\sqrt{4x-3}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$
16. $\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=\dfrac{x+4}{x-4}$

17. $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}=1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
18. $1-X=\sqrt[3]{(X-1)(X-13)}$

!Recuerda el Teorema del factor!

Para los problemas del 19 a 21 la ecuación transformada es una cuadrática que no tiene factores. Usa la fórmula cuadrática para resolver la ecuación. Puedes verificar si hay soluciones extrañas, buscando las aproximaciones decimales para los radicales usando calculadora. Puedes también verificar las respuestas al simplificar los radicales, como $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ usando la técnica de los problemas 25 a 28 del ejercicio 7-3

19. $x-\sqrt{15-4x}=4$
20. $\sqrt{6x}-1=\sqrt{4x+5}$
21. $\sqrt{-2x}-\sqrt{5-x}=\dfrac{-3}{\sqrt{5-x}}$

22 Soluciones extrañas

a) Transforma la ecuación $3=8+\sqrt{x-7}$, aislando el radical y luego elevando al cuadrado ambos miembros.

b) Resuelve la ecuación transformada en la parte (a) y muestra que el valor que se obtiene es solución extraña.

c) ¿Qué otra ecuación puedes elevar al cuadrado ambos miembros y obtener la misma ecuación que hiciste en la parte (a)?

d) Muestra que la respuesta que obtuviste en la parte (b) es una solución de la ecuación en la parte (c)

e) Explica porque invirtiendo el proceso de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación, no necesariamente nos conduce a la ecuación original.

7.5 Función variación con exponentes no- enteros.

En el capítulo 6 estudiaste problemas en los cuales una variable era proporcional a una potencia entera de otra variable. En esta sección estudiaremos problema de variación en los cuales el exponente es constante pero no necesariamente un entero.

Objetivo:

Dada una situación del mundo real en la cual una variable es proporcional a una potencia no entera de otra variable, determinar la constante de proporcionalidad y usar la función variación resultante como modelo matemático.

Ejemplo

El área de un cascarón de huevo es directamente proporcional a la masa del huevo elevada a la 2/3. Suponiendo que un huevo normal de 60 grs. su cascarón tiene un área de 28 cm²

$A=$ área de superficies en cm²

$M=$ masa en grs.
La ecuación general es:

$A= KM^{2/3}$

Para encontrar la ecuación particular, debes calcular K (constante de proporcionalidad), sustituyendo A y M en la ecuación general, tenemos:
$28=K(60)^{2/3}$

Dividiendo cada miembro de la ecuación por $60^{2/3}$, tenemos:

$$\frac{28}{60^{2/3}}=K$$

$1.8269... = K$

Obteniendo así la siguiente ecuación particular.

$A= 1.8269\ M^{2/3}$

El valor de K deberá quedar almacenado en la memoria para que lo uses en el resto del problema.

El modelo está listo para usarse. Por ejemplo, para predecir el área de superficie de un huevo de avestruz de 1600 grs; sencillamente sustituye 1600 por M y haz las operaciones.
$A=1.827\ (1600)^{2/3}$
$A=249.92$

Los huevos de avestruz tienen alrededor 250 cm^2 de cascarón.
Este modelo también puede ser usado en "retroceso" para predecir la masa del huevo cuando ya sabes el área de superficie. Supón que un huevo de lagartija tiene un área de 0.6cm^2. Para encontrar la masa, sustituye 0.6 por A en la ecuación y resuelve para M.

$0.6=1.827\ M^{2/3}$
Divide todo por 1.827

$$\frac{0.6}{1.827}=M^{2/3}$$

Eleva cada miembro de la ecuación a la 3/2

$0.188=M$

Así el huevo de lagartija pesa alrededor de 0.19 grs.
¿Si la masa se duplicara el área de superficie se duplicaría?

Sustituye $M=1$ y $M=2$ y obtienes
Si $M = 1$
$A= 1.8269..\ (1)^{2/3}$
$A\approx 1.83$

Si $M = 2$
$A=1.8269..\ (2)^{2/3}$

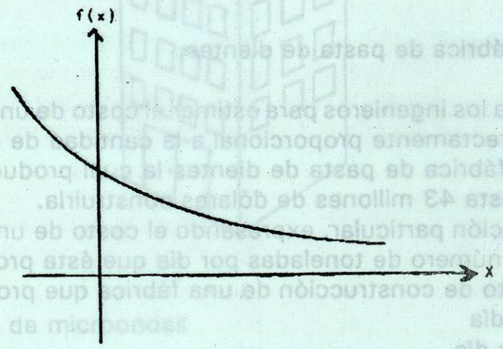
$A\approx 2.90$

Si el doble de 1.83 es 3.66 y A es sólo 2.90, entonces duplicar la masa no se duplica el área. Este hecho puede ser anticipado porque M esta elevado a una potencia menor que 1. Si A equivale a KM^1, entonces si se duplica M se duplica A.

En el ejercicio que sigue, usarás funciones de variación con exponentes no-enteros como modelos matemáticos.

Ejercicio 7-5
Los siguientes problemas tratan de recordar tus conocimientos.

P1. ¿Qué clase de función tiene una gráfica como la de la figura 7-5a?



P2. ¿Si $f(x) = 2x+5$, entonces $f^1(x)$ es igual a ?

P3. Traza la gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

P4. Evalúa : $17-2\cdot 3=$

P5. Un ángulo de 27 grados, ¿Qué % es de un ángulo recto?

P6. ¿Por quién se le dio el nombre al "sistema coordenado cartesiano"?

P7. ¿Cuantos seg. hay en una hora?

P8. Resuelve para x: $3-2x > -7$

P9. Traza una parábola con vértice (1,3) que intersecta en el eje $y=7$

P10. Divide 50 por 1/2 y agrega 3.