5. Usa tus gráficas de los problemas 1, 2 y 3 para contestar las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuando está el término xy en la ecuación, puedes seguir diciendo que la sección cónica va a ser la gráfica con solo observar los coeficientes de x^2 y y^2?
   b) La ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ tiene un discriminante, el cual es igual a: B^2-4ac
   Calcula el discriminante para cada una de las ecuaciones de los problemas 1, 2 y 3
   c) Muestra que el signo del discriminante, nos dice lo siguiente acerca del tipo de sección cónica:

Círculo o Elipse	-	discriminante < 0
Parábola	-	discriminante = 0
Hipérbola	-	discriminante > 0

6. Prueba que la gráfica de una <u>función de variación inversa</u> es una hipérbola.

8.8 Sistemas Cuadráticas.

Hay situaciones en el mundo real donde es importante saber donde se cruzan las gráficas de relaciones cuadráticas. Por ejemplo las trayectorias de las naves espaciales, planetas, cometas, etc., etc. Las cuales viajan bajo la acción de la gravedad describiendo círculos, elipses, hipérbolas o parábolas, como se muestra en la figura 8.8*a*. Encontrar el punto donde una nave espacial cruza la trayectoria de un planeta que se acerca es de fundamental importancia. Los barcos en el mar usan el sistema LORAN, (para navegación de radio de largo alcance), para encontrar su locación, recibiendo señales de radio las cuales las colocan en varias hipérbolas. El punto de intersección de las hipérbolas dice la posición del barco figura 8.8*b*

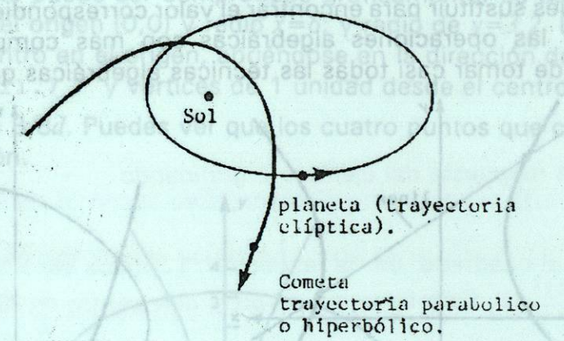


Figura 8.8*a*

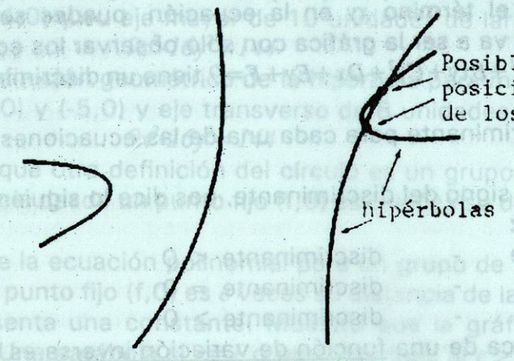


Figura 8.8*b*

Objetivo:

> Teniendo un sistema de dos ecuaciones con dos variables donde por lo menos una ecuación es cuadrática (y ninguna es de grado mayor) ser capaz de
> a) Calcular el conjunto solución del sistema
> b) Muestra que tu respuesta es razonable por medio de la gráfica

Como se muestra en la figura 8.8*c* las gráficas de una ecuación lineal y una cuadrática se cruzan en cuatro lugares. La técnica para encontrar las soluciones es la misma que para los sistemas lineales, eliminar una variable, resolver la ecuación resultante para la otra, después sustituir para encontrar el valor correspondiente de la primer variable. Sin embargo las operaciones algebráicas son más complicadas. Resolver estos sistemas puede tomar casi todas las técnicas algebráicas que haz aprendido.

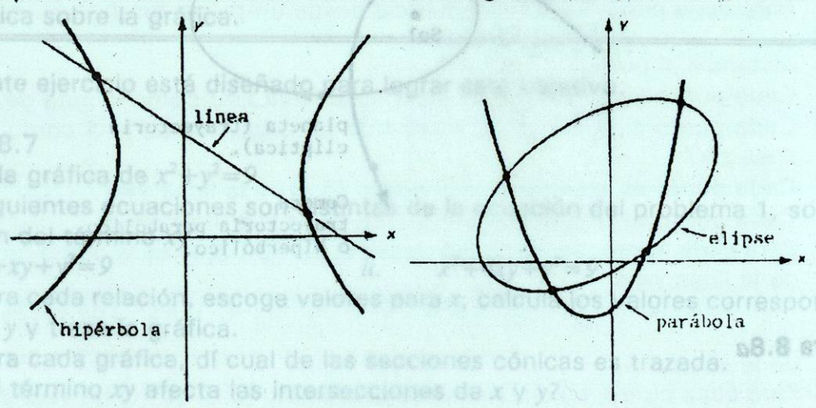


Figura 8.8*c*

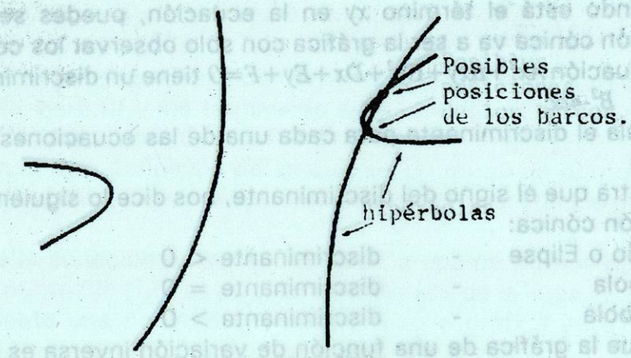


Figura 8.8*b*

Objetivo:

> Teniendo un sistema de dos ecuaciones con dos variables donde por lo menos una ecuación es cuadrática (y ninguna es de grado mayor) ser capaz de
> a) Calcular el conjunto solución del sistema
> b) Muestra que tu respuesta es razonable por medio de la gráfica

Como se muestra en la figura 8.8*c* las gráficas de una ecuación lineal y una cuadrática se cruzan en cuatro lugares. La técnica para encontrar las soluciones es la misma que para los sistemas lineales, eliminar una variable, resolver la ecuación resultante para la otra, después sustituir para encontrar el valor correspondiente de la primer variable. Sin embargo las operaciones algebráicas son más complicadas. Resolver estos sistemas puede tomar casi todas las técnicas algebráicas que haz aprendido.

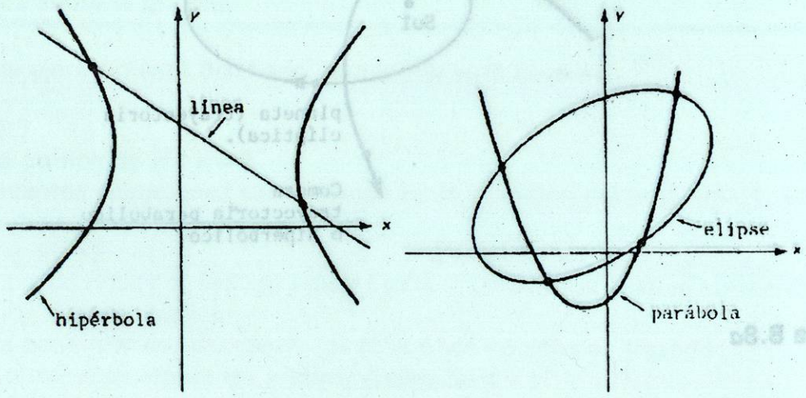


Figura 8.8*c*

Ejemplo 1.

Resuelve el sistema

$9x^2+32y^2=324$ 1

$3x^2-y^2=3$ 2

Solución:

Multiplicar ambos miembros de la ecuación 2 por -3 y suma la ecuación resultante a la ecuación 1

$$\begin{aligned} -9x^2+3y^2 &= -9 \\ \underline{9x^2+32y^2} &\underline{=324} \\ 35y^2 &= 315 \\ y^2 &= 9 \\ y &= \pm 3 \end{aligned}$$

Estos valores de y deben ser sustituidos en cualquiera de las ecuaciones, uno a la vez. Sustituyendo en la ecuación 2 nos dá

$$\begin{aligned} y&=3 & y&=-3 \\ 3x^2-9&=3 & 3x^2-9&=3 \\ 3x^2&=12 & 3x^2&=12 \\ x^2&=4 & x^2&=4 \\ x&=\pm 2 & x&=\pm 2 \end{aligned}$$

$\therefore S=\{(2,3),(-2,3),(2,-3),(-2,-3)\}$

El grupo de soluciones puede ser comprobado gráficamente. La ecuación 1 dá una elipse con centro en el origen (0,0) y radio $x=6$; y radio de $y=3.2$. La ecuación 2 dá una hipérbola con centro en el origen, abriéndose en la dirección de x con asíntotas de inclinación $\pm\sqrt{3}\approx\pm 1.7$ y vértices de 1 unidad desde el centro. Las gráficas se muestran en la figura 8.8*d*. Puedes ver que los cuatro puntos que calculaste son los puntos de intersección.

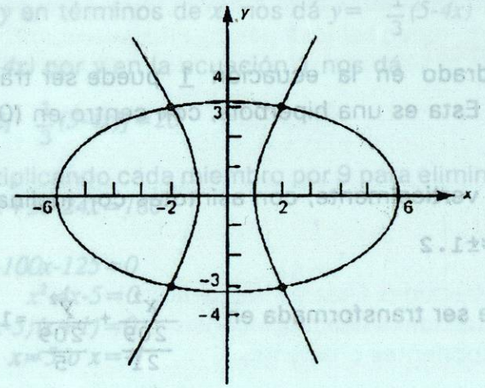


Figura 8.8*d*

Ejemplo 2.

Resuelve el sistema usando la técnica de sustitución

$7x^2-5y^2+20y=3 \qquad \underline{1}$

$21x^2+5y^2=209 \qquad \underline{2}$

Solución:

despejando x^2 en $\underline{2}$ tenemos

$21x^2= 209-5y^2$

$x^2= \frac{1}{21}(209-5y^2) \quad \underline{3}$

sustituyendo este valor de x^2 en $\underline{1}$, nos queda

$7\cdot \frac{1}{21}(209-5y^2)-5y^2+20y=3$

la cual se reduce a $y^2-3y-10=0$

factorizando y resolviendo para y, nos dá

$(y-5)(y+2)=0, \quad \therefore \quad y=5 \text{ o } y=-2$

Estos valores de y, deben ser sustituidos uno a la vez, en la ecuación $\underline{3}$ para encontrar x

Si $y=5$

$x^2= \frac{1}{21}(209-125)$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

Si $y=-2$

$x^2= \frac{1}{21}(209-20)$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

$\therefore S=\{(2,5),(-2,5),(3,-2),(-3,-2)\}$

Ejemplo 3.

Comprueba la respuesta del ejemplo 2 graficando

Solución:

Al completar el cuadrado en la ecuación $\underline{1}$ puede ser transformada en

$-\frac{x^2}{\frac{17}{7}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{17}{5}}=1$ Esta es una hipérbola, con centro en (0,2), abriéndose verticalmente, con asíntotas con inclinación

$\pm\frac{\sqrt{17/5}}{\sqrt{17/7}}=\pm\sqrt{7/5}\approx\pm 1.2$

La ecuación $\underline{2}$ puede ser transformada en $\frac{x^2}{\frac{209}{21}}+\frac{y^2}{\frac{209}{5}}=1$

Esta es la gráfica de una elipse, con radio y de $\sqrt{\frac{209}{5}}\approx\sqrt{42}\approx 6.48$ y radio de x de $\sqrt{\frac{209}{21}}\approx 3.15$

Las gráficas se muestran en la figura 8.8*e*. Como puedes ver los puntos de intersección son (2,5), (-2,5),(3,-2) y (-3,-2)

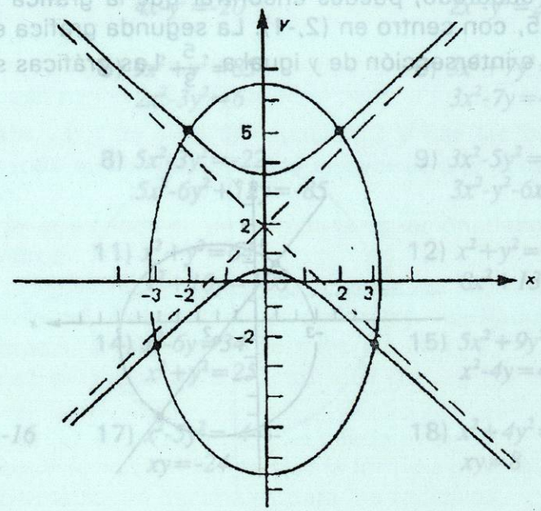


Figura 8.8*e*

Ejemplo 4.

Resuelve el sistema

$x^2+y^2-4x+2y=20 \qquad \underline{1}$

$4x+3y= 5 \qquad \underline{2}$

Solución:

Resolviendo $\underline{2}$ para y en términos de x, nos dá $y= \frac{1}{3}(5-4x) \quad \underline{3}$

Sustituyendo $\frac{1}{3}(5-4x)$ por y en la ecuación $\underline{1}$ nos dá

$x^2+[\frac{1}{3}(5-4x)]^2-4x+2[\frac{1}{3}(5-4x)]=20$

Simplificando y multiplicando cada miembro por 9 para eliminar las fracciones, nos dá

$9x^2+25-40x+16x^2-36x+30-24x=180$

$25x^2-100x-125=0$

$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=5 \text{ o } x=-1$

Sustituyendo estos resultados uno a la vez en la ecuación lineal, o mejor aun en la ecuación 3, nos dá

Si $x=5$ Si $x=-1$

$y=-5$ $y=3$

$\therefore S=\{(5,-5),(-1,3)\}$

Completando el cuadrado, puedes encontrar que la gráfica de la ecuación 1 es un círculo de radio 5, con centro en (2,-1). La segunda gráfica es una línea recta de inclinación $-\frac{4}{3}$ e intersección de y igual a $\frac{5}{3}$. Las gráficas se muestran en la figura 8.8*f*.

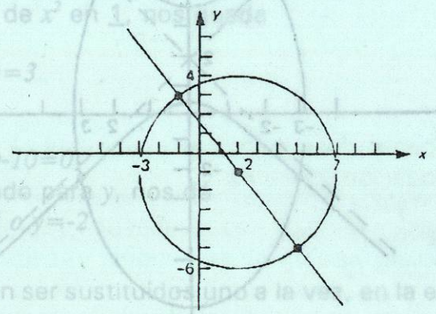


Figura 8.8*f*

Si ambas ecuaciones tienen términos cuadrados y además lineales, o términos xy, el trabajo de resolver el sistema es mucho más complicado. Resolviendo una ecuación para y en términos de x involucra un uso inteligente de la fórmula cuadrática. La ecuación resultante va a ser de cuarto grado en x, y va a tener 4 soluciones. En el siguiente ejercicio encontrarás un problema con estas características.

Ejercicio 8.8

¿Qué va a ser la gráfica?

a) $x^2+y^2=100$ b) $x^2+9y^2=100$ c) $x^2+5xy+9y^2=100$

d) $x^2+6xy+9y^2=100$ e) $x^2+7xy+9y^2=100$ f) $x^2+5xy-9y^2=100$

Dibuja la gráfica.

g) Un sistema de ecuaciones lineales independientes

h) Un sistema de ecuaciones lineales inconsistente

i) Una función de exponentes crecientes

j) $x=y^2$

En los problemas siguientes

a) Calcula el conjunto solución

b) Demuestra que tus soluciones son correctas, dibujando las gráficas

1) $x^2+y^2=25$, $y-x^2=-5$

2) $4x^2+y^2=100$, $4x-y^2=-20$

3) $2x^2+5y^2=98$, $2x^2-y^2=2$

4) $x^2-y^2=-16$, $8x^2-3y^2=3$

5) $9x^2+y^2=85$, $2x^2-3y^2=6$

6) $3x^2+7y^2=187$, $3x^2-7y=47$

7) $x^2+2y^2=33$, $x^2+y^2+2x=19$

8) $5x^2-3y^2=-22$, $5x^2-6y^2+12y=-85$

9) $3x^2-5y^2=22$, $3x^2-y^2-6x=8$

10) $x^2+y^2+6x=16$, $2x^2-3y^2=24$

11) $x^2+y^2=64$, $x^2+10y=100$

12) $x^2+y^2=100$, $8x^2+13y^2=1405$

13) $x^2+y^2+8x=-15$, $9x^2+25y^2=225$

14) $x^2-6y=34$, $x^2+y^2=25$

15) $5x^2+9y^2=161$, $x^2-4y=4$

16) $20x^2-3y^2+12y=-16$, $20x^2+3y^2=128$

17) $x^2-5y^2=-44$, $xy=-24$

18) $x^2+4y^2=68$, $xy=8$

19) $16x^2-3y^2=-11$, $8x-y=-11$

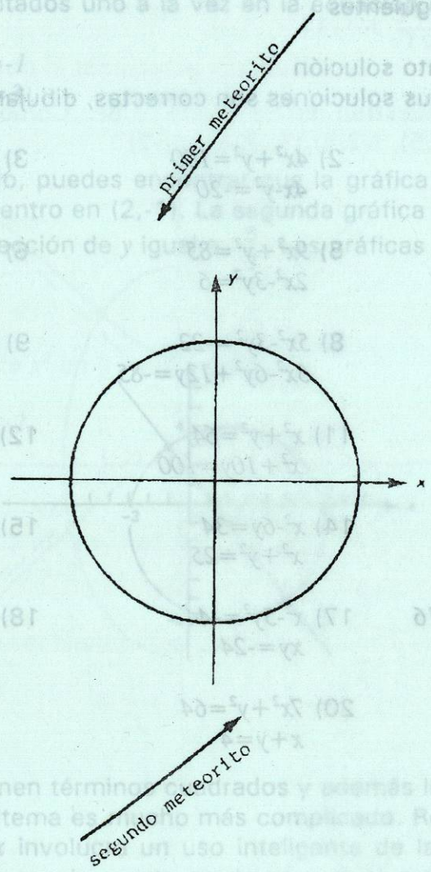
20) $7x^2+y^2=64$, $x+y=4$

21. Problema del rastreo de un meteorito.

Imagina que haz sido contratado por el observatorio palomar cerca de San Diego. Tu tarea es rastrear meteoritos y ver si van o no a estrellarse contra la tierra. Ya que la tierra tiene una sección transversal circular, decides poner un sistema de coordenadas con su origen en el Centro de la tierra. La ecuación de la superficie de la tierra es.

$$x^2+y^2=40$$

donde x y y son distancias en miles de kilómetros.



a) El primer meteorito que observas se mueve a lo largo de la parábola cuya ecuación es

$$18x-y^2=144$$

¿Va a estrellarse contra la superficie de la tierra este meteorito?

b) El segundo meteorito esta viniendo de la parte de abajo de la izquierda a lo largo de una de las ramas de la hipérbola.

$$4x^2-y^2-80x=-340$$

Ver dibujo.¿Va a estrellarse contra la superficie de la tierra?. Si es así ¿dónde? y si no ¿cómo lo sabes?.

c) ¿Cuál es el radio de la tierra para los 100 kilómetros más cercanos?

22. Cuadráticas generales.

La solución de un sistema general de cuadráticas es complicado. Involucra todas las técnicas algebráicas que conoces. Debes ser capaz de usar sustitución, fórmula cuadrática general, resolver ecuaciones con radicales, elevar al cuadrado un polinomio,

factorizar un polinomio de cuarto grado mediante el teorema del factor, obtener aproximaciones decimales para los radicales y descartar soluciones extrañas dibujando la gráfica.

Dado el sistema.

$$5x^2+y^2+30x-6y=-9 \quad \underline{1}$$
$$x^2+3y^2+4x-6y=21 \quad \underline{2}$$

Solución:

a) Considera a x como "constante". Escribe la ecuación 1 como una cuadrática para y. Después usa la fórmula general para mostrar que $y=3\pm\sqrt{-5x^2+30x}$

b) Sustituye este valor de y en la ecuación 2 y haz las operaciones indicadas, simplifica lo más que puedas. Vas a encontrar que 2 es un factor común de cada término.

c) Aisla el radical que queda en un lado de la ecuación, después eleva al cuadrado ambos miembros.

d) Transforma la ecuación de manera que todos los términos estén a la izquierda y cero a la derecha. Debes tener un polinomio cuadrático (cuarto grado) en la izquierda, empezando con $49x^4$ y terminando con 36.

e) Usa el teorema del factor para mostrar que $(x+1)$ y $(x+6)$ son factores de este polinomio.

f) Muestra que el factor cuadrático que queda es primo.

g) Resuelve la ecuación del inciso d). Usa la fórmula cuadrática donde la necesites y obten aproximaciones decimales para los radicales.

h) Encuentra los valores de y correspondientes para cada valor de x del inciso g). (4 valores)

i) Dibuja la gráfica de la dos ecuaciones. Después desecha los valores de y del inciso h), los cuáles no corresponden a los puntos de intersección.

j) Escribe el grupo de soluciones del sistema.