EJERCICIO I

En los siguientes problemas del 1 al 8 simplifica combinando términos semejantes:

1. 3cs-5cs+13cs
2. -6xy+3xy+xy
3. 3a-2a-a+5a
4. 15x-3x+8x
5. 5a+2b-7a-3b+4a+b
6. 9x+3y-5x-y+3x-2y
7. 4p+b+5p-8b-p+7b
8. 3xy-8z+5xy-3z+xy-4z

Suma las siguientes tres expresiones en cada uno de los problemas del 9 al 20

9. 3x+2y-4z
   2x-3y+3z
   4x+5y+2z

10. 5x-2y-3z
    -7x-y+7z
    2x+3y-2z

11. 4a-3b+6c
    2a+8b-11c
    -a+2b+c

12. 3r-2s+5t; -7r-s+7t; 4t-8s+7t

13. 4p-t; 3t-8p; -7p+4t

14. $4ax-5a^2x-8ax^2$; $3ax+7a^2x+6ax^2$; $-6ax+a^2x+3ax^2$

15. 5a-b+3c; -a+3b+11c; 12a-18b-15c

16. 3x-18y+10; 3+7x+10y; 19x+23-8y

17. $\frac{1}{2}a+\frac{5}{3}b-\frac{8}{5}c; \frac{3}{2}a-\frac{8}{3}b-\frac{1}{5}c; \frac{5}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{5}c$

18. $5x-\frac{1}{3}y; \frac{7}{2}x-\frac{3}{5}y, \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y$

19. 0.2a+0.7b -3.7c; 0.14a-0.32b+7.2c; 3.01a-5.2b-0.1c

20. 1.2x-5.3y; -7.2x+8.3y; 0.5x-3.7y

1.6. SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS.

En el lenguaje algebraíco la operación de sustraer o restar y de x se simboliza x-y, que es lo mismo que x+(-y), es decir para restar y de x, se suma el inverso aditivo de y al número x.

En la sustracción de polinomios se suma al minuendo el inverso aditivo del sustraendo y se reducen términos semejantes. Recuerda que el inverso aditivo de un polinomio se obtiene cambiando el signo de cada uno de sus términos.

La sustracción de polinomios puede disponerse escribiendo el minuendo en un renglón y el inverso aditivo del sustraendo en el renglón siguiente de manera que los grupos de términos semejantes quedan colocados en una misma columna y se reducen.

El resultado de una sustracción se llama diferencia; desde luego, la suma del sustraendo con la diferencia da el minuendo.

EJEMPLO 1:

Efectúa la siguiente resta de polinomios:

(2x+3y-4Z+8) - (5x+4y+4Z+12)

SOLUCIÓN:

(2x+3y-4Z+8)-(5x+4y+4Z+12)= (2x+3y-4Z +8)+(-5x-4y-4Z-12)

$$
\begin{array}{l}
= 2x+3y-4Z+8 \\
\quad -5x-4y-4Z-12 \\
\hline
\quad -3x-y-8Z-4
\end{array}
$$

EJEMPLO 2:

Al polinomio; $4x^3-5x^2+7x-6$, réstale $x^3+2x^2+9x-15$.

SOLUCIÓN:

La operación propuesta suele indicarse mediante el empleo de paréntesis en la forma siguiente:

$4x^3-5x^2+7x-6-(x^3+2x^2+9x-15)$

$= 4x^3-5x^2+7x-6-x^3-2x^2-9x+15$. Reduciendo términos semejantes queda: $3x^3-7x^2-2x+9$. También podemos disponer los polinomios de la manera siguiente:

$= 4x^3-5x^2+7x-6$
$\quad -x^3-2x^2-9x+15$

$3x^3-7x^2-2x+9$

EJEMPLO 3:

En el siguiente ejercicio sustraiga el primer polinomio del segundo;
$6a-10b+8c$; $15a+8b-2c$

SOLUCIÓN

$15a+8b-2c-(6a-10b+8c)$

$= 15a+8b-2c$
$\quad -6a+10b-8c$

$9a+18b-10c$

EJEMPLO 4:

Reste el segundo polinomio del primero; $2x-5y+Z+8$;$3y-x-2Z+8$.

SOLUCIÓN

$= \quad 2x-5y+Z+8$
$\quad x-3y+2Z-8$

$3x-8y+3Z$

EJEMPLO 5:

Efectúa la siguiente sustracción de polinomios;
$(5n^3-7n^2-10n+6) - (6n^3-8n^2+4n-10)$

SOLUCIÓN

$5n^3-7n^2-10n+6$
$-6n^3+8n^2-4n+10$

$-n^3+n^2-14n+16$

EJERCICIO II

Reste el segundo número del primero en los problemas del 1 al 8

1. 5,11
2. 3,-2
3. -7,4
4. 8,-3
5. 7,-2
6. 6,6
7. -2,2
8. -50,-10

Reste la segunda expresión de la primera en los problemas 9 al 15.

9. $7a-3b+4c$; $8a-4b+15c$
10. $2x-8y$; $-5x+3y$
11. $6x-7y+5z$,$-3x+8y-z$
12. $5a-8b+c$; $4a-b+3c$
13. $7s-8r+4t$; $s+r-5t$
14. $\frac{7}{2}a-\frac{3}{4}b;\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}b$
15. $\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{5}z;-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}y-\frac{2}{5}z$

En los problemas 16 al 21, resuelva lo indicado.

16. Sustraiga $2a-3b+5c$ de la suma de $3a+8b-5c$ y $7a-b+3c$
17. Sustraiga $4x-2y+3z$ de la suma de $x-8y+5z$ con $3x-y+6z$
18. Sustraiga la suma de:
    $2a+7b-5c$ y $3a-9b+7c$
    del polinomio $5a-11b-4c$
19. De la suma de
    $2v-3u+5w$ y $v+5u-7w$ sustraiga el polinomio $5v-7u+11w$
20. Sustraiga la suma de $\frac{3}{5}a-\frac{7}{3}b+\frac{3}{7}c$ y $\frac{2}{5}a+\frac{3}{2}b+\frac{4}{7}c$ de $4a-7b+2c$
21. Se designa por A la suma de los polinomios:

    $2x^3-5x^2+7x-8$; $12x^3-x+6x^2-1$
    y por B la suma de
    $-3x^3+x^2-20x-3$ con $2x-5x^2+x^3-10$
    Halle A - B

1.7 MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

1.7.1 Multiplicación de potencias.

Supongamos que queremos multiplicar las dos potencias a^m y a^n donde a es un número real cualquiera y m y n son números naturales. O sea, queremos hallar $a^m \cdot a^n$

Tenemos que:

$$a^m . a^n = \underbrace{a.a.a. \ldots\ldots\ldots a}_{m \text{ veces}} \;.\; \underbrace{a.a.a. \ldots\ldots\ldots a}_{n \text{ veces}}$$

El resultado es, pues, un producto de m+n factores iguales a "a" que es, por definición: a^{m+n}.

Tenemos pues, que $a^m . a^n = a^{m+n}$. Es decir que:

"Para multiplicar dos potencias de igual base se eleva la misma base a la suma de los exponentes de los factores.

EJEMPLOS:

$t^8 . t^7 = t^{15}$

$y . y^9 = y^{10}$

Propiedades de la multiplicación de potencias. Teniendo en cuenta la propiedad anterior y la definición de potencias con exponente natural se pueden demostrar fácilmente las siguientes propiedades.

$(a.b)^n = a^n . b^n$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ con } b \neq 0$$

$$y \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Tomemos por ejemplo, la segunda propiedad.

Veamos cómo demostrarla

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ significa que se multipliquen n fracciones iguales a $\frac{a}{b}$. Para hacerlo, debemos multiplicar todos los numeradores (son en total n e iguales a "a") luego el numerador del producto es a^n. De manera análoga el denominador del producto es b^n.

Por tanto:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

De manera análoga se pueden demostrar las otras dos propiedades.

EJEMPLOS:

$14^{10} = (2.7)^{10} = 2^{10} . 7^{10}$

$3^5\ 5^5 = (3.5)^5 = 15^5$

$(3^5)^{24} = 3^{5.24} = 3^{120}$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^4}$$

1.7.2 Multiplicación de dos Monomios:

Para efectuar la multiplicación de un monomio por otro se siguen los pasos que se mencionan a continuación:

1º) Se multiplican los signos; recuerda que el producto de dos números de igual signo es positivo, mientras que si son de signo contrario el producto es negativo.

2º) Se multiplican los coeficientes.

3º) Se multiplican las partes literales, utilizando la siguiente ley de la multiplicación para los exponentes.

$a^m . a^n = a^{m+n}$

EJEMPLOS:

Multiplica los siguientes monomios.

1) $(6x^2yZ)\ (3xyZ^5) = 18x^{2+1}\ y^{1+1}\ Z^{1+5} = 18x^3y^2Z^6$

2) $(-5a^3bc^4)\ (4abc^2) = -20a^{3+1}\ b^{1+1}\ c^{4+2} = -20a^4b^2c^6$

3) $(-8mn^3w^2)\ (-5m^2nw^5) = 40m^{1+2}\ n^{3+1}\ w^{2+5} = 40m^3\ n^4\ w^7$

4) $(4a^3bc^2)\ (2abc)\ (-a^2b^3c^4) = -8a^6b^5c^7$

5) $(-ab^2c)^3\ (-2^3ab^3c^2)^2 = (-a^3b^6c^3)\ (2^6a^2b^6c^4) = -64a^5b^{12}c^7$

6) $(ab^3c)^2\ (-3bc^2)^3\ (2a^2bc^3)^4 = -324\ a^{10}b^{13}c^{20}$

1.7.3 Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición la cual establece que:

$a(x_1+x_2+\dots x_n)= ax_1+ax_2+\ \dots\dots +ax_n$

Es decir, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio y se suman los productos obtenidos.

EJEMPLOS:

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

1) $7a^2(a^2-ab+b)$
$= 7a^2(a^2)+7a^2(-ab)+7a^2(b)$
$= 7a^4-7a^3b+7a^2b$

2) $5x(x^3-2x^2-x-1)$
$= 5x(x^3)+5x(-2x^2)+5x(-x)+5x(-1)$
$= 5x^4-10x^3-5x^2-5x$

3) $3b(-b^2+2b-1)$
$= 3b(-b^2)+3b(2b)+3b(-1)$
$= -3b^3+6b^2-3b$

4) $-5y(4y^2-y-2)$
$= -20y^3+5y^2+10y$

5) $-2abc^2(4ab^3c-3a^2b^2c-6a^2bc^4)$
$=- 8a^2b^4c^3+6a^3b^3c^3+12a^3b^2c^6$

1.7.4 Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, también se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación, multiplicando cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo y reduciendo al final términos semejantes.
Así por ejemplo:
$(a+b)(x+y)=$

Si hacemos $x+y=Z$, la expresión nos queda $(a+b)Z= aZ+bZ$
$= a(x+y) +b(x+y) = ax + ay + bx + by =$

EJEMPLO 1:

Multiplica los polinomios; $2x+5$; $x^2 -4x-1$

SOLUCIÓN:

Para indicar la multiplicación de dos polinomios se escriben ambos, uno a continuación del otro, encerrados en paréntesis, sin ningún signo intermedio, tal como sigue:

$(2x+5)(x^2-4x-1)$
$= 2x(x^2-4x-1) +5(x^2-4x-1)$
$= 2x^3-8x^2-2x +5x^2-20x-5$
$= 2x^3-8x^2-2x + 5x^2-20x-5$
$= 2x^3-3x^2-22x-5$

EJEMPLO 2:

Efectúa la operación que se indica y simplifica:
$(2a-5)(3a^2+6a-4)$
$= 2a(3a^2+6a-4) -5(3a^2+6a-4)$
$= 6a^3 +12a^2-8a-15a^2-30a+20$

$$\begin{array}{l} 6a^3+12a^2-8a+20 \\ \quad -15a^2-30a \\ \hline 6a^3-3a^2-38a+20 \end{array}$$

EJEMPLO 3:

Efectúa la operación que se indica y simplifica:
$(2x^2-7x-3)\ (2x^3-5x^2+x-3)$

SOLUCIÓN:

$2x^2\ (2x^3-5x^2+x-3)\ -7x\ (2x^3-5x^2+x-3)\ -3\ (2x^3-5x^2+x-3)$
$= 4x^5-10x^4+2x^3-6x^2\ -14x^4+35x^3-7x^2+21x-6x^3+15x^2-3x+9$

$$\begin{array}{l} 4x^5-10x^4+2x^3-6x^2+21x+9 \\ \quad -14x^4+35x^3-7x^2 \\ \qquad\qquad -6x^3+15x^2-3x \\ \hline 4x^5-24x^4+31x^3+2x^2+18x+9 \end{array}$$

EJEMPLO 4:

Eleva el binomio $4x+3y$ al cuadrado y simplifica.

SOLUCIÓN:

Elevar el binomio al cuadrado significa que se multiplica por sí mismo; por consiguiente:

$(4x+3y)^2= (4x+3y)\ (4x+3y)$
$= 4x\ (4x+3y)\ +3y\ (4x+3y)$
$= 16x^2+12xy+12xy+9y^2$
$= 16x^2+24xy+9y^2$

EJEMPLO 5:

Efectúa la operación que se indica y simplifica:
$(5x-2y)\ (5x+2y)$

SOLUCIÓN:

$5x\ (5x+2y)\ -2y\ (5x+2y)$
$= 25x^2+10xy-10xy-4y^2$
$= 25x^2-4y^2$

EJEMPLO 6:

Efectúa y simplifica: $(x-3y)\ (x^2+2xy-4y^2)$

SOLUCIÓN:

$x\ (x^2+2xy-4y^2)\ -3y\ (x^2+2xy-4y^2)$
$= x^3+2x^2y\ -4xy^2\ 3x^2y-\ 6xy^2+12y^3$

$$\begin{array}{l} x^3+2x^2y-4xy^2 \\ \quad -3x^2y-6xy^2+12y^3 \\ \hline x^3-x^2y-10xy^2+12y^3 \end{array}$$

EJEMPLO 7:

Efectúa las operaciones que se indican y simplifica:
$(3a-5)\ (a+3)\ -\ (a+5)\ (a-1).$

SOLUCIÓN:

En este ejercicio primeramente tenemos que efectuar las multiplicaciones que se nos indican y después restaremos el polinomio que resulte del segundo producto del que resulte del primero.

$(3a+5)\ (a+3)\ -\ (a+5)\ (a-1)= 3a\ (a+3)\ +5\ (a+3)-\ [a\ (a-1)\ +5\ (a-1)]$
$= 3a^2+9a+5a+15-\ [a^2-a+5a-5]$
$= 3a^2+14a+15-\ [a^2+4a-5]$

$$\begin{array}{l} 3a^2+14a+15 \\ -\ a^2-\ 4a+\ 5 \\ \hline 2a^2+10a+20 \end{array}$$

EJERCICIO III

Calcula cada uno de los productos siguientes:

1 $(8x^5y^2)\ (17x^3y^9)$
2 $(-5a^2b^3c)\ (-8ab^5)\ (-15b^4c^5)$
3 $(17h^9j^{12})\ (23k^3)\ (-10h^5j^3k^9)$

4 $32a^5bc^7\ (10ab-21b^2c+7a^2b^5c^2)$

5 $11x^4y^6z^2\ (28xy^5z^9+12x^2y-20\ y^9z^{12})$

6 $-2a^2b\ (a^3+5a^2b^2-3b^4)$

7 $14x^2y^3\ (5xy-12x^2y^5+23)$

8 $(x+7)\ (x+8)$

9 $(2x-5)\ (4x+9)$

10 $(4x^2+1)\ (3x^2-7)$

11 $(7a+3b)\ (9a-5b)$

12 $(5a^2+7b^2)\ (5a^2-7b^2)$

13 $(9h-11k)\ (9h-11k)$

14 $(3p-2q+5)\ (3p-2q-5)$

15 $(3x^2+x)\ (3x^2+x)\ (3x^2+x)$

16 $(6x-5y)\ (36x^2+30xy+25y^2)$

17 $(3a+7b)\ (9a^2-21ab+49b^2)$

18 $(2m+2n+3)\ (3m+3n+2)$

19 $(10x-5y+1)\ (4x-2y-3)$

20 $(12x-8y+5)\ (9x-6y-2)$

21 $(a^2-2a+3)\ (a^2-2a-3)$

22 $(b^2+3b-4)\ (b^2+3b+4)$

23 $(7a^3+5a^2-8a+9)\ (2a^3-3a^2+2a-3)$

24 $(x^3+x^2+x-1)\ (x^3-x^2+x+1)$

25 $(p^5+3p^3-3p-1)\ (p^5-3p^3-3p+1)$

1.8 DIVISIÓN ALGEBRAICA

1.8.1. <u>División de potencias de igual base</u>

Supongamos que queremos dividir a^m entre a^n con a real no nulo; m y *n* naturales y m>*n*.

La operación anterior se indica así $\frac{a^m}{a^n}$. Vamos a simplificar esta fracción: en el numerador tenemos el factor a repetido m veces y en el denominador el mismo factor n veces.

Como hemos supuesto que m≥ n todos los factores del denominador se cancelan con n factores del numerador quedando m-n factores iguales "a" en el numerador y 1 en el denominador; por tanto, como resultado de la simplificación queda a^{m-n}

Luego: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$ y m y *n* son naturales, m≥ *n*.

1.8.2. <u>Exponente cero</u>

Sea a real, no nulo y *n* un número natural distinto de cero.

Vamos a obtener $\frac{a^n}{a^n}$ por dos vías.

1ª. Aplicando la regla de división de potencia que vimos anteriormente obtenemos $a^{n-n}= a^0$.
Es lógico que nos preguntemos ¿qué significado le daremos al exponente cero?
Veamos:

2ª $\frac{a^n}{a^n} = 1$ pues el cociente de dos números iguales diferentes de cero, es igual a 1.

De acuerdo con el carácter transitivo de la igualdad concluimos que para todo $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Claro está que a^0 no significa que la a se tome cero veces como factor. Lo que precede nos sugiere definir o convenir que, para todo $a \neq 0$, $a^0=1$.