$6^0 = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

$(234)^0 = 1$

1.8.3 Exponentes negativos

Ya sabemos lo que significa la operación de potenciación a^n con n natural, n≥2: el productor de *n* factores iguales a a; también les hemos dado interpretación a a^n cuando n= 0.
Veamos ahora qué significado le damos a a^n con a ≠ 0 y *n* entero negativo.

$$a^{-3} = a^{-3}\,(1)\,a^{-3}\left(\frac{a^3}{a^3}\right) = \frac{a^{-3+3}}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3}$$

De manera más general $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo n natural

1.8.4 División de monomios.

Para efectuar la división entre dos monomios se siguen los pasos que se mencionan a continuación:

1) Se determina el signo del cociente, utilizando las reglas de los signos.

"Si se dividen números de igual signo el cociente es positivo; si tienen signos contrarios, es negativo".

2) se divide el coeficiente de el numerador entre el coeficiente del denominador.

3) Se dividen las partes literales, utilizando las siguientes propiedades de los exponentes para la división:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } m \ \phi \ n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n \ \phi \ m \end{cases}$$

Donde aε R y a es diferente de 0.

EJEMPLOS:

Efectúa las siguientes divisiones entre monomios, escribe las respuestas sin exponentes negativos.

1) $\frac{8a^8b^{12}}{2a^5b^7} = 4a^{8-5}b^{12-7} = 4a^3b^5$

2) $\frac{24a^3b^{12}c^9}{-6ab^8c^9} = -4a^{3-1}b^{12-8}(1) = -4a^2b^4$

3) $\frac{-32x^{12}b^6c^{15}d}{-2x^{10}b^6c^{14}d} = 16x^2(1)c(1) = 16x^2c$

4) $\frac{30x^4y^2c}{-5xyc} = -6x^3y(1) = -6x^3y$

5) $\frac{-20a^{n+2}b^{n+5}}{8a^nb^{n-1}} = -\frac{5}{2}a^2b^6$

6) $\frac{9a^4b^7}{36a^6b^{10}} = \frac{1}{4a^2b^3}$

7) $\frac{-8x^8y^7z^2}{24x^2y^{10}z^3} = \frac{-x^6}{3y^3z}$

8) $\left(\frac{x^3y^2}{xy^5}\right)^4 = \frac{x^{12}y^8}{x^4y^{20}} = \frac{x^8}{y^{12}}$

9) $\left(\frac{2a^2y}{ay^2}\right)^{-6} = \frac{2^{-6}a^{-12}y^{-6}}{a^{-6}y^{-12}} = \frac{y^6}{64a^6}$

1.8.5 División de un polinomio entre un monomio

Dada la expresión: $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a}$,

de acuerdo con la propiedad distributiva de la adición con respecto a la división tenemos que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a} = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a}$$

Es decir:

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio.

EJEMPLO 1)

Efectuar la división : $\frac{16x^5 - 12x^2 + 4x}{4x}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{16x^5 - 12x^2 + 4x}{4x} = \frac{16x^5}{4x} - \frac{12x^2}{4x} + \frac{4x}{4x}$$

$= 4x^4 - 3x + 1$

1.8.6 División de dos Polinomios:

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, deduciremos el método de la división de dos polinomios a partir de la multiplicación.

Si multiplicamos los polinomios (x^2-5x+3) $(x-4)$ su producto es; $\underline{x^3-9x^2+23x-12}$ (compruébalo).

Por consiguiente si $\dfrac{x^3-9x^2+23x-12}{}$ se divide por $\underline{x-4}$, el resultado es $\dfrac{x^2-5x+3}{}$; es decir el primer factor de la multiplicación. En dicha división el polinomio $\dfrac{x^3-9x^2+23x-12}{}$ se llama dividendo, $\underline{x-4}$ es el divisor y x^2-5x+3 es el cociente; el residuo, por supuesto, es cero.

El primer término del dividendo, x^3 se obtiene multiplicando el primer término del divisor x, por el primer término del cociente, $\underline{x^2}$, por lo tanto para obtener el primer término del cociente, x^2, se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, $\frac{x^3}{x}=x^2$. Si se multiplica este primer término del cociente por el divisor, x^2 $(x-4)$ se obtiene x^3-4x^2. Al restar x^3-4x^2 del dividendo, resulta $(x^3-9x^2+23x-12) - (x^3-4x^2)= -5x^2+23x-12$.

El polinomio $-5x^2+23x-12$ es el nuevo dividendo. El primer término, $-5x^2$, del nuevo dividendo resulta de multiplicar el segundo término del cociente, $-5x$, por el primer término del divisor, x, por lo tanto para obtener el segundo término del cociente, se divide el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor; $\frac{-5x^2}{x}=-5x$. Al multiplicar el segundo término del cociente por el divisor y restando del nuevo dividendo, resulta:

$-5x(x-4)= -5x^2+20x$
$-5x^2+23x-12- (-5x^2+20x)$
$= -5x^2+23x-12+5x^2-20x$
$= 3x-12$

El polinomio $3x-12$ es ahora el nuevo dividendo. El primer término de este nuevo dividendo resulta de multiplicar el tercer término del cociente por el primer término del divisor; 3 (x), por consiguiente, para obtener el tercer término del cociente se divide el primer término del nuevo dividendo por el

primer término del divisor; $\frac{3x}{x}=3$; al multiplicar el tercer término del cociente por el divisor y restando del nuevo dividendo resulta:

$3(x-4)= 3x-12$
$3x-12-(3x-12)$
$= 3x-12-3x+12$
$= 0$

Por lo tanto, el residuo es: cero.

Efectuemos ahora la división, disponiendo los pasos de forma semejante a como lo hemos hecho en aritmética:

$$x-4\overline{\big)\,x^3-9x^2+23x-12}$$

El primer término del cociente es:

$$\frac{\underline{\text{Primer término del dividendo}}}{\text{Primer término del divisor}}=\frac{x^3}{x}=x^2$$

Este primer paso lo indicamos así:

$$\begin{array}{l} \qquad\;\; x^2 \\ x-4\overline{\big)\,x^3-9x^2+23x-12} \end{array}$$

Multiplicamos ahora el primer término del cociente por el divisor, el producto se resta del dividendo, lo cual se hace cambiando de signo a cada uno de los términos de la expresión que se va a restar y se simplifica como sigue:

$x^2(x-4) = x^3-4x^2$

$$\begin{array}{l} \qquad\;\; x^2 \\ x-4\overline{\big)\,x^3-9x^2+23-12} \\ \quad\;\; \underline{-x^3+4x^2\qquad\qquad\quad} \\ \qquad\quad -5x^2+23x-12 \qquad \text{(nuevo dividendo)} \end{array}$$

El segundo término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor.

$\frac{-5x^2}{x} = -5x$ y escribimos este término en el cociente a continuación de x^2

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 5x \\ \hline x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\ & -x^3 + 4x^2 \\ \hline & -5x^2 + 23x - 12 \end{array}$$

Multiplicamos ahora el segundo término del cociente por el divisor, se resta el producto del nuevo dividendo y se simplifica:

$-5x\ (x-4) = -5x^2+20x$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 5x \\ \hline x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\ & -x^3 + 4x^2 \\ \hline & -5x^2+23x-12 \\ & +5x^2-20x \\ \hline & 3x-12 \end{array}$$

3x-12 es el nuevo dividendo. Para obtener el tercer término del cociente se divide una vez más el primer término del nuevo dividendo entre el primer término del divisor

$\frac{3x}{x} = 3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 5x + 3 \\ \hline x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\ & -x^3+4x^2 \\ \hline & -5x^2+23x-12 \\ & +5x^2-20x \\ \hline & 3x-12 \end{array}$$

Multiplicamos el tercer término del cociente por el divisor, el producto se resta del nuevo dividendo y se simplifica.

$3\ (x-4) = 3x-12$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 5x + 3 \\ \hline x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\ & -x^3+4x^2 \\ \hline & -5x^2+23x-12 \\ & +5x^2-23x \\ \hline & 3x-12 \\ & -3x+12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

El cero es el residuo de la división.

En general, para dividir dos polinomios, se procede siguiendo los pasos que se mencionan a continuación:

1) Se ordenan el dividendo y el divisor de acuerdo a los exponentes decrecientes de una variable que aparezca en ambos, incluyendo términos con coeficiente cero para las potencias faltantes.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.

3) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se resta el producto del dividendo, la diferencia que se obtiene es el nuevo dividendo.

4) Para encontrar el segundo término y todos los consecutivos del cociente se repiten los pasos anteriores hasta que el grado del polinomio diferencia obtenida sea menor que el del divisor.

5) Se comprueba el resultado verificando que:

Cociente x divisor + residuo = dividendo.

Se recomienda al estudiante que, cada vez que efectúe una división compruebe el resultado.

EJEMPLOS:

1) Divide $6x^3+5x^2-9x-7$ entre $2x+1$

SOLUCIÓN:

1er. paso: Divide $6x^3 \div 2x$

2º. paso: Multiplicar $3x^2$ por $2x+1$ y restar el producto del dividendo y simplificar términos semejantes.

3er. paso: Dividir $-2x^2 \div 2x = x$

4o. paso: Multiplicar x por $2x+1$ y restar el producto del nuevo dividendo.

5o. paso: Dividir $-10x \div 2x = -5$

6o. paso: Multiplicar -5 por $2x+1$ y restar del nuevo dividendo.

7o. paso: Como la diferencia (-2) es de menor grado que el divisor pues -2 es constante su grado es cero y $2x+1$ es de grado 1, aquí termina la operación.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 + x - 5 \\ \hline
2x+1 & 6x^3 + 5x^2 - 9x - 7 \\
 & \underline{-6x^3 - 3x^2} \\
 & \quad 2x^2 - 9x - 7 \\
 & \quad \underline{-2x^2 - x} \\
 & \qquad -10x - 7 \\
 & \qquad \underline{10x + 5} \\
 & \qquad\qquad 2
\end{array}
$$

Resumiendo el cociente es $3x^2+x-5$ y el residuo, -2

Para comprobar la operación, multiplicamos $(3x^2+x-5)$ por $\underline{2x+1}$ y al producto se le suma el residuo -2.

$(2x+1)(3x^2+x-5) = 2x(3x^2+x-5) + 1(3x^2+x-5)$
$= 6x^3+2x^2-10x+3x^2+x-5$
$= 6x^3+2x^2-10-x$
$\underline{\quad +3x^2+x-5}$
$= 6x^3+5x^2-9x-5$

Sumando el residuo -2 al producto anterior, queda:

$6x^3+5x^2-9x-5+(-2)$
$= 6x^3+5x^2-9x-5-2$
$= 6x^3+5x^2-9x-7$
La expresión obtenida es el dividendo por lo tanto el resultado es correcto.

EJEMPLO 2:

Dividir $2y^2+4y+y^3-2$ entre $y+3$

SOLUCIÓN:

En este ejercicio lo primero que debemos hacer es ordenar el dividendo y después efectuar la división siguiendo los pasos correspondientes.

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - y + 7 \\ \hline
y+3 & y^3 + 2y^2 + 4y - 2 \\
 & \underline{-y^3 - 3y^2} \\
 & \quad -y^2 + 4y - 2 \\
 & \quad \underline{+y^2 + 3y} \\
 & \qquad 7y - 2 \\
 & \qquad \underline{-7y - 21} \\
 & \qquad\quad -23
\end{array}
$$

cociente: y^2-y+7
Residuo: -23

Comprobación:
$(y+3)(y^2-y+7) + (-23) =$
$y(y^2-y+7) + 3(y^2-y+7) - 23$
$y^3-y^2+7y+3y^2-3y+21-23$
$y^3-y^2+7y+21$
$+3y^2-3y-23$

y^3+2y^2+4y-2

Como el polinomio precedente es, precisamente, el dividendo, los resultados de la división han quedado comprobados.

EJEMPLO 3:

Dividir $x^3+4x-29$ entre $x-3$

SOLUCIÓN:

Observa que en este ejercicio no existe termino con la parte literal x^2, por lo tanto en el dividendo agregaremos el término $0x^2$ en el lugar que le corresponde y luego procederemos a efectuar la división.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+13 \\ x-3 & x^3+0x^2+4x-29 \\ & -x^3+3x^2 \\ \hline & 3x^2+4x-29 \\ & -3x^2+9x \\ & 13x-29 \\ & -13x+39 \\ \hline & 10 \end{array}$$

Cociente: $x^2+3x+13$
Residuo: 10

Comprobación:
$(x-3)(x^2+3x+13)+10$
$=x(x^2+3x+13)-3(x^2+3x+13)+10$
$=x^3+3x^2+13x-3x^2-9x-39+10$
$=x^3+3x^2+13x-39$
$-3x^2-9x+10$

$x^3+4x-29$

EJEMPLO 4:

Dividir $125x^3-64$ entre $5x-4$.

SOLUCIÓN:

Observa que en este ejercicio no aparecen los términos con las partes literales x^2 ni x por lo que formaremos el dividendo agregando los términos $0x^2$ y $0x$ en el lugar que les corresponde.

$$\begin{array}{r|l} & 25x^2+20x+16 \\ 5x-4 & 125x^3+0x^2+0x-64 \\ & -125x^3+100x^2 \\ & 100x^2+0x-64 \\ & -100x^2+80x \\ & 80x-64 \\ & -80x+64 \\ & 0 \end{array}$$

Como ejercicio verifica el resultado

EJEMPLO 5:

Dividir $10a^2-3b^2-13ab$ entre $2a-3b$

SOLUCIÓN:

Antes de efectuar la división, tenemos que ordenar el dividendo con respecto a una variable y después se siguen los pasos ya explicados en los ejemplos precedentes. Efectuemos esta división ordenando el dividendo con respecto a la literal a.

$$\begin{array}{r|l} & 5a+b \\ 2a-3b & 10a^2-13ab-3b^2 \\ & -10a^2+15ab \\ & 2ab-3b^2 \\ & -2ab+3b^2 \\ & 0 \end{array}$$

Por lo tanto el cociente es $5a+b$ y el residuo es cero

Compruébese

EJERCICIO IV

Efectúa las operaciones que se indican y simplifica. Escribe el resultado sin exponentes negativos.

1) $\dfrac{x^4y^3}{x^2y^2}$

2) $\dfrac{36a^6b^{10}}{9a^2b^5}$

3) $\dfrac{\div 25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$

4) $56x^9y^5z\div 8x^6y^4z$

5) $-216a^{32}b^{45}\div 18a^{19}b^{26}$

6) $154x^8y^5z\div -22x^3y^2z$

7) $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$

8) $\dfrac{x^3y^2 + x^4y^2 - x^5y^2}{x^3y^2}$

9) $\dfrac{-36x^3y^2 - 24x^2y^3}{-12x^2y^2}$

10) $(6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4) \div (3ab^2)$

11) $(-30x^2y^4-45x^2y^3Z) \div (-15x^2y^3)$

12) $\dfrac{(x+a)^2 + (x+a)}{(x+a)}$

13) $2x^4y^2 - 4x^3y^3 + 6x^2y^4 \div -2x^3y^3$

14) $n^2 - 5n + 4 \div n - 4$

15) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 3 \div x - 3$

16) $(6a^2-7a+5) \div (2a-3)$

17) $(3a^3-16) \div (a-2)$

18) $(x^2-9) \div (x+3)$

19) $(x^4-2x^3+x^2-1) \div (-x+1+x^2)$

20 $(6p^2+10pq+6q^2) \div (3p+2q)$

21) $(15x^5-27x^2-7x^4-7x+6) \div (5x^2+x-1)$

22) $(x^4+64) \div (x^2+8-4x)$

23 $(2x^4-11x^3+3x^5+10x+4) \div (x+x^2-2)$

24) $(4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4) \div (2x^2-xy-2y^2)$

25) $(x^4+x^8+1) \div (x+x^2+1)$

EJERCICIO V

Efectúa las operaciones indicadas. Expresa el resultado sin exponentes negativos o nulos.

1) $(4a^3b^2c)(-8ab^3c)$

2) $(-2x^5yz)^2(3x^2yz^2)^3$

3) $(3x^2y)^3(2xy^4)$

4) $(-5a^3b^4c^3)(-3ab^2c)$

5) $\dfrac{8a^5b^2c^4}{-2a^2bc}$

6) $\dfrac{(2a^2bc)^5}{(2ab^3c^2)^2}$

7) $\dfrac{8a^3b^5c^2}{24a^5b^4c^3}$

8) $\left(\dfrac{3x^2y^2z5}{2xy^5z^5}\right)^3$

9) $\left(\dfrac{2x^3y^2z}{6x^5yz^2}\right)^{-2}$

10) $\left(\dfrac{12x^3y^3z^2}{18xy^4z}\right)^{-4}$

11) $\dfrac{36a^{-4}b^{-1}c^{-6}d^0}{-6a^{-2}b^{-2}c^{-6}}$

12) $\dfrac{7a^{-3}b^4c^{-1}}{21a^{-2}b^{-2}c}$

13) $\left(\dfrac{9x^{-3}y^{-2}z^{-3}}{36x^{-1}y^{-3}z^{-2}}\right)^{-2}$

14) $\left(\dfrac{a^3bc^4d^0}{-a^2b^2c^5d^{-2}}\right)^{-3}$

15) $(3a^{-2}b^3c^4)^{-2}$

16) $(2^a3b^{-4}cd0)^{-3}$

17) $\left(\dfrac{5a^{-7}b^{-2}c}{10a^{-2}b^{-3}c^{-1}}\right)^{-4}$

18) $\left(\dfrac{a^4b^2c^3}{2a^2b^4c}\right)^{-2}\left(\dfrac{a^{-3}b^{-2}c^{-5}}{a^{-1}b^{-3}c^{-6}}\right)^2$

19) $\left(\dfrac{2a^2y^0z}{-ayz^2}\right)^{-6}$

20) $\left(\dfrac{x^4y^2z}{-2x^5yz^0}\right)^3$