EJEMPLO 4

x^2-12

Solución
x^2-12 — Escribe la expresión dada
Es polinomio primo — Ya que el 12 no es un cuadrado perfecto

EJEMPLO 5

x^2+16

Solución
x^2+16 — Escribe la expresión dada
Es polinomio primo — Ya que $x^2 + 16$ dos cuadrados

EJERCICIO 2.1.3

Para los siguientes problemas factoriza el polinomio o menciona si es primo.

1) x^2-16
2) a^2-4
3) x^2-1
4) d^2-49
5) $4x^2-25$
6) $9x^2-49$
7) $16x^2-100$
8) $81p^2-1$
9) $4-25x^2$
10) $64-25x^2$
11) $15-x^2$
12) x^2-16
13) $36a^2-b^2$
14) h^2-m^2
15) $49r^2-p^2$
16) $4x^2-9y^2$
17) $(a+b)^2-4$
18) $(x+y)^2-36$
19) $81-64(xy)^2$
20) $(x+3)^2-(y+5)^2$

2.1.4 BINOMIO ELEVADO AL CUADRADO

La expresión $(x-2)^2$ es un binomio elevado al cuadrado ya que $(x-2)^2$ significa $(x-2)(x-2)$ y es el mismo procedimiento que multiplicar dos binomios.

$(x-2)^2$
$= (x-2)(x-2)$
$= x^2-4x+4$

También puedes usar el siguiente modelo
$(x-2)^2=x^2-4x+4$

Primero escribes el primer término elevado al cuadrado, o sea $(x)^2$. Segundo paso, anotas el doble producto del primer término por el segundo, o sea, $2(x)(-2)=-4x$. Por último escribes el segundo término elevado al cuadrado $(-2)^2=4$

OBJETIVO:

Ser capaz de elevar binomios al cuadrado.

EJEMPLO 1

Eleva al cuadrado $(x+5)^2$

Solución
$(x+5)^2$ — Escribe la expresión dada
$= (x+5)(x+5)$ — Definición de cuadrado
$= x^2+10x+25$ — El término de en medio es $5x+5x = 10x$

EJEMPLO 2

Eleva al cuadrado $(3x+5)^2$

Solución
$(3x+5)^2$ — Escribe la expresión dada
$= (3x+5)(3x+5)$ — Definición de cuadrado
$= 9x^2+30x+25$ — El término de en medio es $15x+15x= 30x$

EJEMPLO 3

Eleva al cuadrado $(x+4)$ usando el modelo descrito anteriormente

Solución
$(x+4)^2$ — Escribe la expresión dada
$=x^2+8x+16$ — El término de enmedio es $2(x)(4)$

EJERCICIO 2.1.4

Desarrolla, utilizando el modelo adecuado para resolverlo en un paso.

1) $(x+4)^2$
2) $(a+2)^2$
3) $(x-5)^2$
4) $(b-7)^2$
5) $(4x+3)^2$
6) $(5x+4)^2$
7) $(9-4x)^2$
8) $(3-10x)^2$
9) $(x+4y)^2$
10) $(5a-b)^2$

11) **Binomio elevado al cubo.**
$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$
Una manera de resolverlo es multiplicar el primero y segundo binomio, luego el resultado multiplicarlo por el tercer binomio.
a) Eleva $(a+b)^3$
b) Eleva $(x-y)^3$

12) **Trinomio elevado al cuadrado**
$(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$
Para resolverlo distribuye cada miembro del primer paréntesis por el segundo paréntesis y luego combina términos semejantes.
a) Eleva $(x+2y+3z)^2$
b) Eleva $(4a+5b-3c)^2$

2.1.5 FACTORIZANDO TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

Los trinomios cuadrados perfectos son el resultado de elevar un binomio al cuadrado como por ejemplo en

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$
$= x^2+6x+9$

Por lo tanto x^2+6x+9 es un trinomio cuadrado perfecto y lo puedes factorizar de la siguiente manera:

Factoriza: x^2+6x+9
$=(x+3)(x+3)$
$=(x+3)^2$

La manera de comprobar que sea un trinomio cuadrado perfecto es que el término constante sea un cuadrado perfecto $(9)=(3)^2$ y luego coeficiente del término de enmedio sea el doble de la raíz del término constante, o sea $\sqrt{9}=3$ y $2(3)=6$

OBJETIVO:

Ser capaz de factorizar trinomios cuadrados perfectos.

EJEMPLO:

Menciona si es un trinomio cuadrado perfecto, si es así transfórmalo en un binomio al cuadrado.

a) $x^2+12x+36$
Solución
$x^2+12x+36$ — Escribe la expresión dada
$=(x+6)^2$ — Ya que $(6)^2=36$ y $2(6)=12$

b) $x^2+10x+64$
Solución
No es un trinomio cuadrado perfecto — Ya que $(8)^2$ si es 64 pero $2(8)=16$ y no 10

c) $x^2-8x+15$

Solución
No es un trinomio cuadrado perfecto — Ya que el 15 no es cuadrado perfecto

EJERCICIO 2.1.5

Escribe los siguientes trinomios como un binomio al cuadrado o menciona si no son trinomios cuadrados perfectos.

1) x^2+6x+9	2) $x^2-10x+25$
3) $x^2+16x+64$	4) x^2-4x+4
5) x^2-2x+1	6) $x^2-8x+20$
7) $x^2-8x+16$	8) $x^2-8x-16$
9) $x^2+20x+81$	10) $x^2+10x+100$
11) $x^2-30x+225$	12) $x^2+62x+961$
13) $x^2-10x+40$	14) $x^2-148x+5476$
15) $x^2+68x+4624$	

2.1.6 FACTORIZACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS

Si multiplicas $(x+5)(x^2-5x+25)$ obtienes lo siguiente:
$(x+5)(x^2-5x+25)$
$=x^3-5x^2+25x+5x^2-25x+125$
$=x^3+125$

Los términos de enmedio se eliminan y la respuesta es una suma de dos cubos ya que $x^3+125=x^3+(5)^3$

Por lo tanto, una suma de dos cubos puede factorizarse de la siguiente forma:
$x^3+5^3 = (x+5)(x^2-5x+25)$

Conclusión

FACTORIZANDO UNA SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

OBJETIVO:

Ser capaz de factorizar la suma o diferencia de dos cubos.

EJEMPLO

Factoriza x^6-343

Solución. Escribe cada término como un cubo perfecto

x^6-343
$=(x^2)^3-7^3$
$=(x^2-7)(x^4+7x^2+49)$

EJERCICIO 2.1.6

En los siguientes problemas factoriza el polinomio completamente.

1) a^3-b^3
2) k^3+n^3
3) y^3+64
4) c^3-729
5) d^6+h^3
6) p^3-w^{12}
7) a^3-27
8) x^3+1
9) x^6-y^6
10) $x^{12}-y^{12}$

2.2 EL MÁXIMO FACTOR COMÚN

En la sección 5.1 factorizaste los enteros como el producto de números primos. Por ejemplo:
108= (2)(2)(3)(3)(3)
120= (2)(2)(2)(3)(5)

Puesto que el 2 es un factor tanto del 108 como del 120, es llamado ***factor común*** de éstos dos números. El 3 y el 6 son también factores comunes como puedes observar al dividir 108 y 120 por 3 y por 6.

$$\frac{108}{3}=36 \qquad \frac{108}{6}=18$$

El coeficiente es un entero.

$$\frac{120}{3}=40 \qquad \frac{120}{6}=20$$

Por lo que más adelante necesitarás hacer en álgebra, es importante encontrar el Máximo Factor Común (MFC) de dos números.

MÁXIMO FACTOR COMÚN

El máximo factor común de dos números es su máximo común divisor.
El máximo factor común (MFC) de dos números enteros positivos *"a"* y *"b"* es el número entero más grande para el cual

$$\frac{a}{MFC}=entero \quad y \quad \frac{b}{MFC}=entero$$

El MFC de dos enteros puede ser encontrado factorizándolos por números primos.
Para 108 y 120 pensarías:
108= (2)(2)(3)(3)(3)
120= (2)(2)(2)(3)(5)
MFC= (2)(2)(3)=12

El MFC es formado multiplicando todos los factores primos comunes con el menor exponente.

Si dos enteros no tienen factores comunes primos su MFC es 1. A tales números se les conoce como ***números primos relativos***.
Por ejemplo:
10=(2)(5)
21=(3)(7)

Tanto el 10 como el 21 están compuestos por números primos. Pero no tienen factores primos comunes. Su MFC es 1.

Las expresiones con variables pueden tener también factores comunes. Por ejemplo:
$x^5= x\times x\times x\times x\times x$
$x^3= x\times x\times x$
Su MFC = $x\times x\times x=x^3$

En esta sección practicarás, encontrando el factor común de parejas dadas de expresiones.

OBJETIVO

Dados dos enteros o dos expresiones con valores variables, determinar su máximo factor común.

EJEMPLO 1
Encuentra el MFC de 12 y 15

MFC = 3

12 = 2×2×3
15 = 3×5

El 3 es factor común en el 12 y 15

EJEMPLO 2
Encuentra el MFC de 540 y 2250

540 = 2×3×3×3×5

2250 = 2×3×3×5×5×5

MFC = 2×3×3×5

2)	540	2)	2250
2)	270	3)	1125
3)	135	3)	375
3)	45	5)	125
3)	15	5)	25
5)	5	5)	5
	1		1

EJEMPLO 3
Encuentra el MFC de 32 y 45

32 = 2×2×2×2×2
45 = 3×3×5
MFC = 1

32 Y 45 son números primos relativos

EJEMPLO 4
Encuentra el MFC de y^7 y y^4

$y^7 = y×y×y×y×y×y×y$

$y^4 = y×y×y×y$

MFC = y^4

NOTA: **Puedes hacer éstos problemas más rápidamente observando que el MFC siempre contiene la variable con el exponente más pequeño.**

EJEMPLO 5
Encuentra el MFC de x^4y^7 y x^5y^3

MFC = x^4y^3

x^4y^7=x×x×x×x×y×y×y×y×y×y×y
x^5y^3= x×x×x×x×x×y×y×y

Hay cuatro factores comunes "x" y tres factores comunes "y"

EJEMPLO 6
Encuentra el MFC de x^7y^5 y x^2z^4

MFC =X^2

Hay dos factores comunes "x"
La "y" y la "z" no son factores comunes.

EJEMPLO 7
Encuentra el MFC de $24x^3y$ y $36x^4y$

MFC = $12x^3y$

El MFC de 24 y 36 es 12
Hay 3 factores comunes "x" y 1 factor común "y".

EJEMPLO 8
Encuentra el MFC de los dos términos en $12x^3 - 18xy^2$
MFC = $6x$

El máximo factor común de 12 y 18 es 6. Hay un factor común "x". La "y" no es factor común.

PRÁCTICA ORAL

Encuentra el MFC de los siguientes números. Si el MFC es 1 también da el número primo relativo.

a) 8 y 12
b) 9 y 15
c) 10 y 15
d) 12 y 15
e) 12 y 16
f) 9 y 16
g) 4 y 10
h) 5 y 10
i) 6 y 10
j) 6 y 12
k) 6 y 15
l) 8 y 15

EJERCICIO 2.2

1) Escribe de memoria la definición de Máximo Factor Común
2) ¿Qué significa para dos números ser números primos relativos? Explica por qué dos números compuestos pueden ser números primos relativos.

Para los problemas del 3 al 20 escribe el MFC de los dos números dados. Haz el trabajo mentalmente hasta donde te sea posible. Si el MFC es igual a 1, también escribe los números primos relativos.

3) 12 y 18
5) 20 y 24
7) 22 y 33
9) 35 y 12
11) 54 y 36
13) 600 y 450
15) 270 y 225
17) 189 y 220
19) 1000 y 1500

4) 16 y 20
6) 24 y 30
8) 18 y 21
10) 22 y 9
12) 56 y 32
14) 252 y 588
16) 315 y 189
18) 225 y 308
20) 2000 y 2100

Para los problemas del 21 al 40, escribe el MFC de las dos expresiones:

21) x^5 y x^3
23) a^7 y a^9
25) b^6 y b^9
27) x^2y^3 y x^5y^2
29) $r^{10}s^{11}$ y r^9s^{13}
31) $10x^6$ y $5x^4$
33) $16m^2$ y $20m^3$
35) $18a^3b^8$ y $21ab^6$
37) $56c^3d^2$ y $32c^3e^2$
39) $24x^2y3z^4$ y $30x^5y^4z^3$

22) x^6 y x^5
24) r^3 y r^7
26) c^8 y c^{12}
28) x^4y^2 y x^3y^7
30) $a^{12}h^{13}$ y a^9h^7
32) $12x^5$ y $6x^8$
34) $20m^4$ y $24m^3$
36) $18c^3d^4$ y $12c^6d$
38) $54x^2z^2$ y $36y^2z^3$
40) $22a^3b^5c$ y $18a^5b^2$

Para los problemas del 41 al 50, encuentra el MFC de los dos términos en la expresión dada:

41) $6x^3+9x^2$
43) $4a^2-8a^5$
45) $3c^8-12c^5$
47) $10x^2y^4+15x^3y$
49) $x^{12}-x^8$

42) $10x^2 + 15x^3$
44) $7b^5-14b^6$
46) $7d^9-21d^4$
48) $8x^5y^2+12xy^3$
50) $y^{15}-y^{10}$

Para los problemas del 51 al 60 encuentra el MFC de los 3 números. Para hacer un factor común un número, deberá ser factor de los 3 números dados. Si no hay factor común de los 3 números escribe el número primo relativo:

51) 24, 28 y 42
53) 50, 75 y 60
55) 12, 15 y 35
57) 100, 120 y 150
59) 720, 108, 1800

52) 24,32 y 40
54) 36,54 y 60
56) 50, 65 y 39
58) 200, 300 y 250
60) 324, 540 y 1080

2.3 FACTORIZANDO POLINOMIOS QUE TIENEN FACTORES COMUNES.

Supongamos que tuvieras que factorizar $4x^2+40x+84$. El coeficiente x^2 no es igual a 1. De tal forma que podrías empezar escribiendo $(4x+\ )(x+\ )$ ó $(2x+\ )(2x+\ )$ y buscar los factores comunes de 84 para llenar en los espacios de la derecha.

Sin embargo, si razonas antes de empezar a trabajar, verás que cada término de $4x^2+40x+84$ tiene el 4 como factor común.
Usando el axioma distributivo, puedes factorizar el 4 de cada término, como lo hiciste en la sección 3.4.
$4x^2+40x+84$
$=4(x^2+10x+21)$

El trinomio $x^2+10x+21$ es mucho más fácil de factorizar que el polinomio original. Tú tienes
$4(x+3)(x+7)$

En esta forma el polinomio se dice que está ***completamente factorizado***. Las operaciones con fracciones en el siguiente capítulo implican la factorización de polinomios completamente.

<u>Técnicas</u>
Primer paso en factorización

El primer paso en la factorización de cualquier polinomio es factorizar el MFC de los términos del polinomio.

OBJETIVO

Dado un polinomio cuyos términos tienen factores comunes, serás capaz de factorizar el polinomio completamente.

EJEMPLO 1
Factoriza completamente $3x^2+30x+48$

$3x^2+30x+48$	Escribe la expresión dada
$=3(x^2+10x+16)$	Factoriza el MFC de los tres términos
$=3(x+2)(x+8)$	2 y 8 son los dos factores de 16 cuya suma es 10

EJEMPLO 2
Factoriza completamente $15x^2-5x-10$

$15x^2-5x-10$	Escribe la expresión dada
$=5(3x^2-x-2)$	Factoriza el 5
$=5(3x+2)(x-1)$	$2x-3x$ da $-x$ el término de enmedio

EJEMPLO 3
Factoriza completamente $7x^2-63$

$7x^2-63$	Escribe la expresión dada
$=7(x^2-9)$	Factoriza 7
$=7(x+3)(x-3)$	Factoriza una diferencia de dos cuadrados