EJEMPLO 4

Factoriza completamente $3x^5+6x^4y-45x^3y^2$

$3x^5+6x^4y-45x^3y^2$ Escribe la expresión dada

$=3x^3(x^2+2xy-15y^2)$ $3x^3$ es el MFC y se encuentra afuera (¡El MFC puede tener una variable!)

$=3x^3(x-3y)(x+5y)$ -3 y 5 son dos factores de -15 cuya suma es 2. (No olvides *"y"* en los segundos términos)

EJEMPLO 5

Factoriza completamente

$2x^3+6x^2-8x$

Respuesta

$2x$ es el factor de x^2+3x-4

EJERCICIO 2.3

Factoriza completamente:

1) $3x^2+12x+9$
2) $4x^2+8x+20$
3) $4x^2+10x+20$
4) $6x^2+9x+30$
5) $6x^2+8x+30$
6) $7x^2-14x+28$
7) x^3-4x^2+3x
8) y^3+8y^2-7y
9) $x^5+7x^4+9x^3$
10) $a^8-5a^7-4a^6$
11) x^3y^3-xy
12) x^3y-xy^3
13) $2x^2+16x+30$
14) $3x^2+21x+30$
15) $3x^2+30x+72$
16) $4x^2+28x+48$
17) $4x^2+4x-24$
18) $5x^2+35x-40$
19) $5r^2-10r-175$
20) $10s^2-40s-210$
21) $2x^2+14xy+24y^2$
22) $2x^2+12xy+16y^2$
23) $6x^2-24x+18$
24) $6x^2-54x+120$
25) $10s^2+110s-120$
26) $8p^2+32p-96$
27) $8a^2-16ab-120b^2$
28) $7r^2-42rs-112s^2$
29) $x^4-8x^3+12x^2$
30) $x^6-9x^5+18x^4$
31) $2c^5+6c^4-8c^3$
32) $3a^5+12a^4-15a^3$
33) $4x^2-100$
34) $2x^2-98$
35) $5x^2-180$
36) $10x^2-250$
37) $7x^3-7x$
38) $11a^3-11a$
39) $10x^2-90y^2$
40) $3x^2-27y^2$
41) x^3y-xy^3
42) r^3s-rs^3
43) $6x^2-48x+96$
44) $7x^2-70x+175$
45) $2m^2+20mp+50p^2$
46) $9b^2+72bc+144c^2$
47) $3ax^2+36ax+60a$
48) $5dx^2+50dx+80d$
49) $6c^2x^2-600d^2x^2$
50) $8p^2x^2-392p^2s^2$
51) $2x^4y^3-18x^3y^4-72x^2y^5$
52) $3x^6y^2-15x^5y^3-150x^4y^4$
53) $6x^2+21x+15$
54) $6x^2+44x+14$
55) $15x^2+40x-15$
56) $12x^2+18x-30$

57) $20e^2-28e+8$
58) $15c^2-48c+9$
59) $18x^2-24xy-24y^2$
60) $16x^2-24xy-72y^2$
61) $4y^6-18y^5+8y^4$
62) $15z^5-65z^4+20z^3$

2.4 BINOMIOS COMO FACTOR COMÚN

Has aprendido cómo usar la propiedad distributiva para factorizar factores comunes, por ejemplo:

$3x+12=3(x+4)$

El número 3 es un factor común de cada término. Algunas veces, los términos de una expresión tienen factores comunes que son binomios, tales como en:

$(x-5)x+(x-5)4$

En este caso el binomio *(x-5)* es un factor común de cada término. Puede ser factorizado de la misma manera que el número 3 lo fue en el primer ejemplo

$(x-5)x+(x-5)4$

$=(x-5)(x+4)$

Factorizando *(x-5)* del primer término (x-5)x separa *"x"* y factorizando *(x-5)* del segundo término (x -5)4 separa 4. De manera que el otro factor es *(x+4)*, justo como estaba en el primer ejemplo.

OBJETIVO

Ser capaz de factorizar un polinomio que tiene como factor común un binomio.

Contesta las preguntas como en los ejemplos.

EJEMPLO 1

Factoriza $(x+7)x-12(x+7)$

$(x+7)x-(x+7)12$ Escribe la expresión dada

$=(x+7)(x-12)$ Factoriza *(x+7)* de cada término. La *"x"* permanece en un término y el "-12" en el otro término

EJEMPLO 2

Factoriza $x(x-2)+6(x-2)$

$x(x-2)+6(x-2)$ Escribe la expresión dada

$=(x-2)(x+6)$ Factoriza *(x-2)* de cada término; *"x"* permanece en un término y el "6" en el otro término

EJEMPLO 3

Factoriza $2a(3r+5)-7b(3r+5)$

$2a(3r+5)-7b(3r+5)$	Escribe la expresión dada
$=(3r+5)(2a-7b)$	Factoriza $(3r+5)$; "$2a$" permanece en el primer término y "$-7b$" permanece en el otro término

EJEMPLO 4

Factoriza $3x(5x-8)-(5x-8)$

$3x(5x-8)-(5x-8)$	Escribe la expresión dada
$=(5x-8)(3x-1)$	Factoriza $(5x-8)$. "$3x$" permanece en el primer término. "-1" permanece en el otro.

EJEMPLO 5

Factoriza completamente $x^2(2x+5)-36(2x+5)$

$x^2(2x+5)-36(2x+5)$	Escribe la expresión dada
$=(2x+5)(x^2-36)$	Factoriza $(2x+5)$
$=(2x+5)(x+6)(x-6)$	Factoriza x^2-36 como la diferencia de dos cuadrados. Cada factor es ahora primo, de modo que la expresión está factorizada completamente.

PRÁCTICA ORAL

Proporciona el binomio como factor común

Ejemplos

i) $(x+5)x+(x+5)y$

ii) $(x+6)x+(x+5)y$

Respuestas

i) La cantidad es $(x+5)$

ii) No tiene factor común

Proporciona únicamente el binomio como factor común si es que lo hay.

a) $(x+3)x+(x+3)y$

b) $(x-7)x+(x-7)y$

c) $a(x+2)-b(x+2)$

d) $c(x-4)-d(x-4)$

e) $k(x-6)+(x-6)p$

f) $(x+9)j-k(x+9)$

g) $(x-3)y+(x-4)z$

h) $(x+5)r-(x-5)s$

i) $x(x-1)+(6(x-1)$

j) $x(x+8)-7(x+8)$

k) $(x+2)(x+3)+5(x+2)$

l) $(x-4)(x-1)-6(x-1)$

EJERCICIO 2.4

Para los problemas del 1 al 30, factoriza el polinomio totalmente

1) $(x+2)x+10(x+2)$

2) $(x+3)x+5(x+3)$

3) $(x-5)x-8(x-5)$

4) $(x-7)x+9(x-7)$

5) $x(x+4)-7(x+4)$

6) $x(x+8)-2(x+8)$

7) $3x(x-21)+4(x-21)$

8) $5x(x-6)-3(x-6)$

9) $6r(2r-9)-3(2r-9)$

10) $6b(3s-2)-7(3s-2)$

11) $7a(4a+b)-6(4a+b)$

12) $4p(3p+j)5(3p+j)$

13) $12(3x-1)+x(3x-1)$

14) $13(2x-5)+x(2x-5)$

15) $6x(x+3)+(x+3)$

16) $3x(x-4)+(x-4)$

17) $m(8m-5)-(8m-5)$

18) $k(6k-1)-(6k-1)$

19) $(3x-7)+2x(3x-7)$

20) $(4x-5)+3x(4x-5)$

21) $p(x-j)-k(x-j)$

22) $y(r+c)-k(r+c)$

23) $x^2(x+4)-9(x+4)$

24) $x^2(9x-7)-4(9x-7)$

25) $a^2(r-5)-b^2(r-5)$

26) $c^2(s-2)-d^2(s-2)$

27) $x^2(a^2-4)-y^2(a^2-4)$

28) $x^2(y^2-25)-z^2(y^2-25)$

29) $x^2(16-r^2)-(16-r^2)$

30) $x^2(9-v^2)-(9-v^2)$

Para los problemas del 31 al 50, encuentra el factor común en el polinomio y factoriza el resultado lo más posible.

31) $x(x+3)+(x-5)(x+3)$

32) $x(x+2)+(x-3)(x+2)$

33) $x(2x-7)+(2x-7)(x+6)$

34) $x(3x-5)+(3x-5)(x+4)$

35) $(3a+4)(5x-2)-(3a+4)$

36) $(2r+11)(x-3)-(2r+11)$

37) $x^2(x+7)-(5x+6)(x+7)$

38) $x^2(x-4)+(9x+14)(x-4)$

39) $x^2(2x-1)-(2x-1)(3x+4)$

40) $x^2(5x+1)-(5x+1)(3x-2)$

41\. $x^2(5y-z)-(12x-20)(5y-z)$

42\. $x^2(a-2b)-(7x-10)(a-2b)$

43\. $x(x^2+6x+5)+2(x^2+6x+5)$

44\. $x(x^2-3x-28)-3(x^2-3x-28)$

45\. $x(x^2-6x+9)-3(x^2-3x-28)$

46\. $x(x^2+4x+4)+2(x^2+4x+4)$

47\. $x^3(x+3)-25x(x+3)$

48\. $x^5(x-7)-9x^3(x-7)$

49\. $(x+2)(x^2+x+1)-(x+2)$

50\. $(x-3)(x^2+3x+1)-(x-3)$

Para los problemas del 51 al 60, factoriza los polinomios (si es necesario). Después obtén el MFC de los dos polinomios.

Ejemplo:

$(x+4)(x-1)$ y $(x-1)(x+2)$

MFC = $(x-1)$

NOTA:

Si el MFC entre los polinomios es uno, entonces son polinomios primos entre sí.

Ejemplo:

x^2-9, x^2+x-20

(polinomios primos entre sí)

51\. x^2+3x+2 y $x+1$

52\. x^2+5x+6 y $x+3$

53\. x^2+2x-8 y x^2-3x+2

54\. $x^2-7x+10$ y x^2-x-2

55\. x^2-x-6 y x^2+x-6

56\. $x^2-7x+12$ y x^2-3x-4

57\. x^2-9 y $x^2+2x-15$

58\. x^2-25 y $x^2-8x+15$

59\. $(x+1)(x-2)(x-7)$ y $(x+1)(x+3)(x-5)$

60\. $(x+2)(x-2)(x-7)$ y $(x-7)(x+7)(x-2)$

2.5 FACTORIZACIÓN POR AGRUPAMIENTO (ASOCIACIÓN)

En la última sección aprendiste cómo factorizar polinomios que tienen binomios como factor común, tales como:
$2a(3r+5)-7b(3r+5)$
$=(3r+5)(2a-7b)$

Suponiendo que se te pide factorizar:
$6ar+10a-21br-35b$

Los primeros dos términos tienen *"2a"* como factor común. Los últimos dos términos tienen *"7b"* como factor común. Asociando términos y luego haciendo la factorización tenemos:

$6ar+10a-21br-35b$	Expresión dada
$=(6ar+10a)+(-21br-35b)$	Asocia términos
$=2a(3r+5)-7b(3r+5)$	Factoriza $2a$ y $-7b$
$=(3r+5)(2a-7b)$	Factoriza $(3r+5)$

Como puedes ver, esta ultima línea es lo mismo que en el primer ejemplo. Todo lo nuevo es la asociación de pares de términos y factorizar el factor común mayor. Esta técnica es llamada ***"Factorización por Agrupamiento"*** o ***"Factorización por Asociación".***

OBJETIVO

Dado un polinomio con cuatro términos, ser capaz de factorizarlo por agrupamiento (asociación)

EJEMPLO 1
Factoriza completamente $x^2+2x+xy+2y$

$x^2+2x+xy+2y$	Escribe la expresión dada
$=x(x+2)+y(x+2)$	Factoriza *"x"* de x^2+2x y factoriza *"y"* de $xy+2y$
$=(x+2)(x+y)$	Factoriza $(x+2)$

EJEMPLO 2
Factoriza completamente $15x^2-6ax-20cx+8ac$

$15x^2-6ax-20cx+8ac$	Escribe la expresión dada
$=3x(5x-2a)-4c(5x-2a)$	Factoriza $3x$ de $15x^2-6ax$ y factoriza $-4c$ de $-20cx+8ac$. (Cuando factorices $-4c$ de $8ac$, obtienes $-2a$, no $+2a$).
$=(5x-2a)(3x-4c)$	Factoriza $(5x-2a)$.

EJEMPLO 3
Factoriza completamente: $ax+3a+x+3$

$ax+3a+x+3$	Escribe la expresión dada
$=a(x+3)+1(x+3)$	Factoriza a de $ax+3a$ y factoriza 1 de $x+3$
$=(x+3)(a+1)$	Factoriza $(x+3)$

EJEMPLO 4
Factoriza completamente: $x^3-5x^2-9x+45$

$x^3-5x^2-9x+45$	Escribe la expresión dada
$=x^2(x-5)-9(x-5)$	Factoriza x^2 de x^3-5x^2 y factoriza -9 de $-9x+45$
$=(x-5)(x^2-9)$	Factoriza $(x-5)$
$=(x-5)(x+3)(x-3)$	Para factorizar completamente, factoriza x^2-9 como una diferencia de cuadrados.

EJEMPLO 5
Factoriza completamente: $15x^2-12x+10x-8$

$15x^2-12x+10x-8$	Escribe la expresión dada
$=3x(5x-4)+2(5x-4)$	Factoriza $3x$ de $15x^2-12x$ y factoriza 2 de $10x-8$.
$=(5x-4)(3x+2)$	Factoriza $(5x-4)$

PRÁCTICA ORAL
¿Qué factorizarías de los dos primeros términos y qué factorizarías de los dos últimos términos para factorizar por agrupamiento?

Ejemplos:

i) $3ax+ab-6x-2b$	*i) a, -2*
ii) $3x+6y+bx+2by$	*ii) 3b*

a) $ax+bx+ay+by$	b) $x^2+xy+xz+yz$
c) $ax-2x+ay-2y$	d) $3x-3y-ax+ay$
e) $ac+bc-a^2-ab$	f) $a^2c+a^2d+b^2c+b^2c$
g) x^3+3x^2+2x+6	h) $x^3-5x^2-3x+15$
i) $2a+ax-2x^2-x^3$	j) $x^2-2x+xy-2y$
k) $5ax+10a-x-2$	l) $6a^2+5ab+6a+5b$

EJERCICIO 2.5

En los problemas del 1 al 34, factoriza el polinomio completamente

1) $a^2+3a+ab+3b$
2) $r^2+7r+rc+7c$
3) $8x^2+12xy+10xz+15yz$
4) $15x^2+20xy+18nx+24ny$
5) $bx+3cx-2br-6cr$
6) $ax+4ex-3ad-12de$
7) $6ax-14x+15a-35$
8) $9hx-21x+6h-14$
9) $mc-6cv-5m+30v$
10) $rv-2vx-6r+12x$
11) $x^2+5xy+x+5y$
12) $x^2+8xz+x+8z$
13) $5rz+2sz-5r-2s$
14) $6dt+5ct-6d-5c$
15) $30ab+36a+70b+84$
16) $24mx+36m+30x+45$
17) $2x^3-3x^2-4x+6$
18) $10x^3-15x^2+2x-3$
19) $12x^3+45x^2+32x+120$
20) $2x^3-7x^2-10x+35$
21) $24x^3-18x^2+60x-45$
22) $64x^3-160x^2+24x-60$
23) $2x^3+x^2-18x-9$
24) $3x^3+x^2-75x-25$
25) $5x^3-10x^2-80x+160$
26) $6x^3-6x^2-24x+24$
27) $12x^2+18x+10x+15$
28) $15x^2+21x+25x+35$
29) $2x^2-3x+14x-21$
30) $8x^2-6x+12x-9$
31) $15x^2-6x+5x-2$
32) $16x^2-10x+8x-5$
33) $8x^2-3x-8x+3$
34) $10x^2-7x-10x+7$

Por ejemplo: $x^2+6x+9-y^2=(x+3)^2-y^2$ la cual es una diferencia de 2 cuadrados. Otros polinomios tienen más de cuatro términos. Por ejemplo: $x^2+5x+6-ax-3a=(x+3)(x+2)-a(x+3)$ la cual tiene (x+3) que es un binomio como factor común.

Factoriza cada uno de estos polinomios completamente:

35) $x^2+6x+9-y^2$
36) $x^2+8x+16-c^2$
37) $x^2-10x+25-9a^2$
38) $x^2-14x+49-16y^2$
39) $x^2-(y^2+8y+16)$
40) $x^2-(a^2+10a+25)$
41) $25x^2+a^2+4a-4$
42) $100x^2-y^2+6y-9$
43) $x^2-10x+25-49c^2$
44) $x^2-8x+16-25b^2$
45) $x^2+5x+6-ax-3a$
46) $x^2+9x+20-rx-4r$
47) $x^2+2x-3+rx+3r$
48) $x^2+4x-5+sx+5s$
49) $3sx+15s+x^2+3x-10$
50) $2mx+6m+x^2+x-6$
51) $x^4-2x^3+x^2+3x-10$
52) $x^4-5x^3+x^2+x-30$
53) $cx^2+8cx+15c+dx^2-2dx-35d$
54) $ux^2+9ux+14u+zx^2-3zx-10z$

2.6 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

Supongamos que tienes que factorizar $6x^2+31x+35$

!Hay tantos factores posibles para probar, que podrías pasar una tarde completa en un tipo de problemas! Lo que necesitas es una manera sistemática para factorizar estos trinomios cuadrados más difíciles.

En los problemas del 27 al 34 de la sección anterior, factorizaste polinomios como: $6x^2+10x+21x+35$ por agrupamiento. Asociando los primeros dos términos y los 2 últimos, da: $(6x^2+10x)+(21x+35)$.

Sacando el factor "$2x$" de $6x^2+10x$ y "7" de $21x+35$ da: $2x(3x+5)+7(3x+5)$

Ahora $(3x+5)$ es como factor común y se puede factorizar así: $(3x+5)(2x+7)$

Supón ahora que debes factorizar el trinomio cuadrático: $6x^2+31x+35$

Puedes separar el término de enmedio "$31x$" en $10x+21x$ y factorizando por agrupamiento. El polinomio dado observa que (10)(21) es igual a 210, y que (6)(35) es igual a 210. Esto es cierto debido a que cuando multiplicas: $(3x+5)(2x+7)$ obtienes:

$$(3x+5)(2x+7) = (3)(2)x^2+(5)(2)x+(3)(7)x+(5)(7)$$

$(5\cdot 2, 3\cdot 7)$

$(3\cdot 2, 5\cdot 7)$

Los 4 también aparecen en el 10 y en el 21. Así que el 10 y el 21 son dos factores de 210 que se suman al 31.