Para los problemas del 21 al 50, factoriza los polinomios completamente por observación (preferentemente) o por separación del término medio.

21. $2x^2+7x+3$
23. $3x^2+10x+8$
25. $5x^2-21x+4$
27. $6x^2+7x-5$
29. $6x^2-x-5$
31. $6r^2+13rs+6s^2$
33. $15a^2+16ab+4b^2$
35. $6m^2-25m+4$
37. $2m^2+15m-50$
39. $4x^2+36x+32$
41. $7x^2-6xy-y^2$
43. $8x^5+2x^4-3x^3$
45. $2a^3x-13a^2x^2+15ax^3$
47. $27ru^2+36ru+12r$
49. $12(x+3)x^2-2(x+3)x-4(x+3)$

22) $3x^2+7x+2$
24) $3x^2+11x+8$
26) $7x^2-16x+4$
28) $6x^2+5x-4$
30) $6x^2-17x-3$
32) $6a^2+11ab+4b^2$
34) $6x^2+19xy+15y^2$
36) $4r^2-25r+6$
38) $5p^2-8p-4$
40) $6x^2+36x+48$
42) $9c^2-8cd-d^2$
44) $18x^7-9x^6-2x^5$
46) $4u^3v-12u^2v^2+9uv^3$
48) $10sn^2-75sn-135s$
50) $12(x-2)x^2-21(x-2)x-6(x-2)$

CAPITULO 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Tú sabes cómo sumar, multiplicar y simplificar fracciones numéricas. En este capítulo harás estas operaciones con fracciones que contienen variables. Las evaluarás para valores dados de la variable o resolverás ecuaciones para encontrar el valor o valores de la misma. Un buen ejemplo es un problema que involucra el movimiento de un bote sobre el agua, a favor o en contra de una corriente, donde el tiempo es igual a la distancia dividida por la velocidad suponiendo que ésta es constante.

Variable	
x	Es velocidad del bote en el agua.
Expresiones	
$x-8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra en contra de la corriente.
$x+8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra a favor de la corriente.
$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}$	Tiempo total para una distancia de 200 kilómetros en contra de la corriente y 50 kilómetros a favor de la corriente.
Ecuación	
$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}=52.2$	Tiempo total es 52,5 horas.

Esta ecuación es un ejemplo de lo que podrás resolver más adelante.

3.1 INTRODUCCIÓN A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una expresión algebraica racional es una expresión que tiene un polinomio en el numerador y un polinomio en el denominador. Las siguientes son expresiones racionales.

$\frac{x+5}{x-2}$ y $\frac{x^2-3x+5}{x-5}$, $x^3+2x+6=\frac{x^3+2x+6}{1}$ 1 es un polinomio de grado cero.

Definición

EXPRESIÓN ALGEBRAICA RACIONAL

Una expresión algebraica racional es aquella que puede ser escrita como una razón de dos polinomios.

$\frac{polinomio}{polinomio}$

(el polinomio del denominador no debe ser cero).

Es fácil evaluar una expresión racional tal como:

$$\frac{x-5}{x+4}$$

Lo que necesitas hacer es sustituir x por un valor dado y hacer operaciones aritméticas.

Por ejemplo, si *"x"* es igual a 3, entonces:

$$\frac{x-5}{x+4}$$

$$=\frac{3-5}{3+4}$$

$$=\frac{-2}{7}$$

Además puedes encontrar "x" conociendo el valor de la expresión. Por ejemplo, si la expresión anterior es igual a 9, entonces:

$$\frac{x-5}{x+4}=9$$

Esta ecuación es llamada ***Ecuación Fraccional***. Ésta, puede simplificarse eliminando el denominador de la fracción; esto se hace multiplicando cada miembro de la ecuación por *x*+4. O lo que es lo mismo, pasando x+4 al segundo término como factor

$$(x+4\cdot)\frac{x-5}{x+4}=(x+4)(9)$$

El miembro de la izquierda se convierte en *x*-5. El 9 se distribuye sobre *x*+4. El resultado es:
x-5=9*x*+36

Haciendo operaciones y agrupando términos semejantes la expresión resultante es:
-8*x*=41

$$x=-\frac{41}{8}$$

Si quieres puedes obtener una respuesta que sea un número decimal, haciendo la división indicada. Por lo tanto:
x=-5.125

El resultado se puede comprobar sustituyendo *x* por -5.125 y haciendo operaciones aritméticas.

$$\frac{x-5}{x+4}$$

$$=\frac{-5.125-5}{-5.125+4}$$

$$=\frac{-10.125}{-1.125}$$

= 9

OBJETIVOS

Dada una expresión algebraica racional, encontrar su valor conociendo el valor de *x*, y averiguar a qué es igual *x* cuando conoces el valor de la expresión.

Cubre las respuestas y trabaja en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Evalúa $\frac{x+7}{x-2}$ si:

a) x=5 b) x=-7 c) x=2

a) $\frac{x+7}{x-2}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{5+7}{5-2}$ Sustituye x por 5

$=\frac{12}{3}$ Realiza operaciones

$= 4$ Divide

b) $\frac{x+7}{x-2}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{-7+7}{-7-2}$ Sustituye x por -7

$=\frac{0}{-9}$ Realiza operaciones

$= 0$ Divide

c) $\frac{x+7}{x-2}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{2+7}{2-2}$ Sustituye x por 2

$=\frac{0}{9}$ Realiza operaciones

$\frac{9}{0}$ No es un número real

No existe pues no posible la división por cero

EJEMPLO 2

Encuentra x si $\frac{x+7}{x-2}$ es igual a 3. Comprueba tu resultado.

$\frac{x+7}{x-2}=3$ Escribe la ecuación dada

x+7=3(x-2) Multiplica cada miembro por x-2 o bien pasa x-2 multiplicando al segundo miembro

x+7=3x-6 Aplica la ley distributiva

-2x=-13 Resta 3x y resta 7 en cada miembro de la ecuación

$x=\frac{-13}{-2}$ Divide por -2

x= 6.5

Comprobación

$\frac{x+7}{x-2}$

$=\frac{6\cdot 5+7}{6\cdot 5-2}$ Sustituye x por 6.5

$=\frac{13.5}{4.5}$ Realiza operaciones

=3 Divide. Se comprueba la respuesta

EJERCICIO 3.1

1) Evalúa $\frac{x-8}{x+2}$ si:

a) x es igual a 6
b) x es igual a -5
c) x es igual a 8

2) Evalúa $\frac{x-9}{x+4}$ si:

a) x es igual a 3
b) x es igual a -5
c) x es igual a -2

3) Evalúa $\dfrac{2x+7}{x-5}$ si:
a) x es igual a 7
b) x es igual a -2
c) x es igual a 5

4) Evalúa $\dfrac{3x+9}{x-4}$ si:
a) x es igual a 6
b) x es igual a -3
c) x es igual a 4

5) Evalúa $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+7x+10}$ si:
a) x es igual a 4
b) x es igual a -3
c) x es igual a 0

6) Evalúa $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+9x+20}$ si:
a) x es igual a 4
b) x es igual a -5
c) x es igual a 0

7) Para $\dfrac{x-8}{x+4}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 3
b) La expresión es igual a -4

8) Para $\dfrac{x-10}{x+3}$ encuentra x si:
a) La expresión es igual a 5
b) La expresión es igual a -4

9) Para $\dfrac{2x+7}{x-5}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 10
b) La expresión es igual a 2
(¿Sorprendido?)

10) Para $\dfrac{3x+6}{x-4}$ encuentra x si:
a) La expresión es igual a 8
b) La expresión es igual a 3
(¿Sorprendido?)

3.2 SIMPLIFICANDO EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

En secciones anteriores empleaste la propiedad de la multiplicación de fracciones para simplificar.

Ejemplo. Simplifiquemos $\dfrac{30}{45}$

$\dfrac{30}{45} =$

$= \dfrac{15\cdot 2}{15\cdot 3}$ 15 es el máximo factor común (MFC) de 30 y 45

$= \dfrac{15}{15}\cdot\dfrac{2}{3}$ Empleando la propiedad de la multiplicación de fracciones.

$= \dfrac{2}{3}$ Empleando la propiedad de la multiplicación del 1

El mismo procedimiento es usado para simplificar fracciones que contienen variables.

Se factoriza el numerador y el denominador y se cancela el MFC.

Ejemplo

Simplificar $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+5x+6}$

$\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+5x+6} =$

$= \dfrac{(x+3)(x-7)}{(x+3)(x+2)}$ Factoriza el numerador y el denominador

$= \dfrac{x+3}{x+3}\cdot\dfrac{x+7}{x+2}$ Emplea la propiedad de la multiplicación de fracciones.

$= \dfrac{x-7}{x+2}$ Emplea la propiedad de la multiplicación del 1.

$\dfrac{x-3}{x+3}$ Es igual a 1. Si $x \neq -3$

En el último paso de los ejemplos anteriores observa cómo se emplea la multiplicación de una forma apropiada del 1. Esto se puede pensar como: se está multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número. Con esto en mente, puedes ir directamente de

$= \dfrac{(x+3)(x-7)}{(x+3)(x+2)}$ a $\dfrac{x-7}{x+2}$

Tu razonamiento del proceso debe ser: Divido el numerador y el denominador por la misma expresión.

Este proceso es llamado ***Cancelación***, porque existe el mismo factor en el numerador y el denominador ; entonces éste se puede cancelar.

Definición

CANCELACIÓN

Cancelar en una fracción significa dividir el numerador y el denominador por el mismo factor común. Esto es, para expresiones a, b y c donde $a \neq 0$ y $c \neq 0$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

No puedes aplicar la cancelación de otra forma que no sea la mostrada en la definición anterior, por ejemplo:

$$\frac{x-9}{x+3}$$

No puedes cancelar las *x*'s. Porque la x no hace el papel de factor.
Si $x \neq 0$

La cancelación puede hacerse solamente cuando el numerador y el denominador tienen factores comunes. O que pueden ser escritos de manera que los contengan.

OBJETIVO

Estar preparado para cancelar factores comunes del numerador y el denominador de una expresión algebraica racional.

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1
Simplifica

$\frac{15x^8}{25x^2} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{5 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^6}{5 \cdot 5 \cdot x^2} = \frac{3x^6}{5}$ Cancela 5 y x^2.

EJEMPLO 2
Simplifica $\frac{(x+6)(x-3)}{(x+6)(x+3)}$

$\frac{(x+6)(x-3)}{(x+6)(x+3)} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{(x-3)}{(x+3)}$ Cancela el factor (x+6) ; no hay otros factores comunes. ¡No se cancelan los términos de "*x*" ni 3!

EJEMPLO 3
Simplifica $\frac{2x^2-4x-30}{2x^2-7x-15}$

$\frac{2x^2-4x-30}{2x^2-7x-15} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{2(x^2-2x-15)}{(2x^2-7x-15)}$ Primero se obtiene el factor común

$= \frac{2(x-5)(x+3)}{(2x+3)(x-5)}$ Factoriza los trinomios

$= \frac{2(x+3)}{(2x+3)}$ Cancela los factores (x-5)

$= \frac{2x+6}{2x+3}$ No se cancelan los términos 2*x*

PRÁCTICA ORAL

¿Se puede hacer la cancelación? Si es así, ¿Qué se puede cancelar?

a) $\frac{7(x+4)}{2(x+4)}$ b) $\frac{6(x+2)}{6(x+3)}$ c) $\frac{4(x+4)}{6(x+3)}$

d) $\frac{5(x+3)}{5(y+3)}$ e) $\frac{4(x+3)}{(4x+3)}$ f) $\frac{8x}{12x}$