g) $\dfrac{(x+2)(4)}{12(x+2)}$ h) $\dfrac{(x+8)}{(x-8)}$ i) $\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-5)}$

j) $\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x-6)}$ k) $\dfrac{x^2-4}{x+2}$

EJERCICIO 3.2

Para los problemas del 1 al 20, simplifica la expresión.

1) $\dfrac{12x^2}{18x^2}$ 2) $\dfrac{24x^2}{36x^6}$

3) $\dfrac{35x^3y^8}{10x^4y^5}$ 4) $\dfrac{45x^6y^3}{21x^3y^5}$

5) $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$ 6) $\dfrac{(x-3)(x+8)}{(x-4)(x+8)}$

7) $\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x+5)(x-6)}$ 8) $\dfrac{(x-12)(x+7)}{(x+7)(x-3)}$

9) $\dfrac{(3x+2)(x+3)}{(3x-2)(x+3)}$ 10) $\dfrac{(2x-9)(x+5)}{(x-5)(2x-9)}$

11) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 12) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$

13) $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2+x-30}$ 14) $\dfrac{x^2-3x-13}{x^2-36}$

15) $\dfrac{3x^3+5x^2}{6x+10}$ 16) $\dfrac{5x^2-20}{x^2+5x+6}$

17) $\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2-3x-2}$ 18) $\dfrac{4x^2-x-3}{3x^2+x-4}$

19) $\dfrac{10x^2-19x+6}{10x^2-21x+9}$ 20) $\dfrac{12x^2-27}{4x^2-2x-12}$

21) Encuentra x si $\dfrac{x+6}{x+9}=4$ 22) Encuentra x si $\dfrac{x+6}{x-3}=2$

23) Para qué valor x es $\dfrac{x-4}{x+6}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinido?

24) Para qué valor de x es $\dfrac{x-5}{x-6}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinido?

3.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Debes recordar que para multiplicar dos fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

La división de fracciones se hace multiplicando la primera fracción por el recíproco de la segunda. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 2}=\frac{21}{10}$$

En esta sección harás lo mismo, pero con fracciones algebraicas (o sea, con expresiones algebraicas racionales).

OBJETIVO

Dadas dos expresiones racionales, multiplícalas, o divídelas, y simplifica la respuesta.

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Dadas $\frac{12x}{15}$ y $\frac{20x}{18}$

a. Multiplica las fracciones
b. Divide la primera entre la segunda

Solución:

a) Se multiplica numerador por numerador y se divide entre el producto de los denominadores.

$$\frac{12x(20x)}{15(18)} = \frac{240x^2}{270} = \frac{8x^2}{9}$$

b) $\frac{12x}{15} \div \frac{20x}{18}$ — Divide la primera fracción por la segunda

$= \frac{12x}{15} \cdot \frac{18}{20x}$ — Cambia la división a multiplicación por el recíproco

$= \frac{12 \cdot 18x}{15 \cdot 20x}$ — Indica las multiplicaciones

$= \frac{18}{25}$ — Efectúa la operación

EJEMPLO 2

Divide y simplifica: $\frac{x^2 - 2x - 15}{4x^2 + 8x} \div \frac{x+3}{4x-20}$

$\frac{x^2 - 2x - 15}{4x^2 + 8x} \div \frac{x+3}{4x-20} =$ — Escribe la expresión dada

$= \frac{x^2 - 2x - 15}{4x^2 + 8x} \cdot \frac{4x-20}{x+3}$ — Escribe la división como multiplicación por el recíproco.

$= \frac{(x-5)(x+3)}{4x(x+2)} \cdot \frac{4(x-5)}{x+3}$ — Factoriza

$= \frac{(x-5)(x+3)4(x-5)}{4x(x+2)(x+3)}$ — Multiplica

$\frac{(x-5)(x-5)}{x(x+2)}$ — Cancela

$\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 + 2x}$ — Multiplica

PRÁCTICA ORAL

Multiplica o divide, y simplifica.

a) $\frac{2}{3a} \cdot \frac{6}{3a}$ b) $\frac{2}{3a} \div \frac{6}{3a}$ c) $\frac{5}{6x} \cdot \frac{3x}{2}$

d) $\frac{5}{6a} \div \frac{3a}{2}$ e) $\frac{A}{3} \cdot \frac{5}{A}$ f) $\frac{B}{3} \div \frac{5}{B}$

g) $\frac{x^2}{3} \cdot \frac{6}{x}$ h) $\frac{3}{4a} \div \frac{1}{12a^4}$ i) $\frac{4}{3} \cdot \frac{x+2}{12}$

j) $\frac{3}{x+2} \div \frac{5}{x+2}$ k) $\frac{5}{x-7} \cdot \frac{x-7}{10}$ l) $\frac{2}{5} \div \frac{5}{x-2}$

EJERCICIO 3.3

Para los problemas de 1 al 10:

a) Multiplica las dos expresiones
b) Divide la primera expresión por la segunda

1) $\frac{8}{5a}, \frac{7}{9a}$ 2) $\frac{5}{6x}, \frac{2}{7x}$ 3) $\frac{5}{12a}, \frac{11}{18a}$

4) $\frac{8}{9x}, \frac{7}{6x}$ 5) $\frac{x}{16}, \frac{x+3}{4}$ 6) $\frac{x}{15}, \frac{x-2}{5}$

7) $\frac{x-4}{x-1}, \frac{x--5}{x-7}$ 8) $\frac{x+4}{x+7}, \frac{x-3}{x+6x}$ 9) $\frac{2a+3}{3-1}, \frac{4a+5}{ax}$

10) $\frac{3x-4}{2x-1}, \frac{5x-2}{x-6}$

Para los problemas del 11 al 30, realiza la multiplicación o división y simplifica

11) $\frac{6x}{5y} \cdot \frac{10y}{8x}$ 12) $\frac{8a}{3x} \cdot \frac{12x}{16a}$

13) $\frac{5x}{7y} + \frac{25x}{21y}$ 14) $\frac{9x}{14y} + \frac{12x}{21y}$

15) $\frac{20p}{49s} \cdot \frac{42p}{10s}$ 16 $\frac{32x}{33y} \cdot \frac{55x}{8y}$

17) $\frac{30m}{13t} + \frac{15t}{52m}$ 18 $\frac{40a}{17b} + \frac{30b}{51a}$

19) $\frac{6ab2}{35b} \quad \frac{42a}{18ab}$ 20) $\frac{16xy3}{9x} \frac{15x}{4xy}$

21) $\frac{4a+16}{a^2-16} + \frac{4a-16}{a-4}$ 22) $\frac{12-4x}{10+5x} \div \frac{5-x^2}{4-x^2}$

23) $\frac{m^2+2m-35}{6m^3} \quad \frac{2m^2-6m}{m^3+4m-21}$ 24) $\frac{a^2+4a-45}{4a-20} \quad \frac{3a-3}{a^3-81}$

25) $\frac{x^3-9x}{8} + \frac{x-3}{2} \quad \frac{4}{3x-9}$ 26) $\frac{y^2-7y+10}{y^2-6y+5} \div \frac{1}{y-2} \quad \frac{y+1}{y^2-4y+4}$

27) $\frac{m^2+2m-8}{m+4} \cdot (m-2)^{-1}$ 28) $\frac{x^2-2x-3}{x+1} \cdot 5\,(x-3)^{-1}$

29) $\frac{2a+3}{4a+5} + \frac{4a+5}{2a+3} \quad \frac{8a+10}{2a+3}$ 30) $(a^2+4a-12)^{-1} \div \frac{a+6}{a-4}$

31) Encuentra x si $\frac{x+3}{x-2} = 5$

32) Encuentra y si $\frac{2y+5}{y=11} = 2$

33) Para que valor de x es $\frac{x-7}{x-2}$

a) ¿Igual a cero ?
b) ¿Indefinida ?

34) Para qué valor de *y* es $\frac{2y+7}{y-4}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinida?

3.4 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para sumar dos fracciones, sus denominadores **deben ser iguales.** Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28}$$

El 28 es llamado común denominador de las fracciones.

Un ***múltiplo*** de un número dado es un entero multiplicado por ese número.

Por ejemplo 12, 30 y 60 son múltiplos de 6, también 32, 80 y 88 son múltiplos de 8. Hagamos un listado de los múltiplos de 6 y de 8 para mostrar algo interesante:

6: 6 12 18 24 30 36 42 48 54 60 66...
8: 8 16 24 32 40 48 56 64 72 80 88...

Algunos múltiplos de 6 también son múltiplos de 8. Estos son llamados ***Múltiplos Comunes*** de 6 y de 8. El número 24 es el más pequeño de los múltiplos comunes. Es llamado el mínimo común múltiplo. Este número es abreviado M.C.M. cuando sumas dos fracciones, usas el MCM de los denominadores como el común denominador (MCD).

Definición

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Un común múltiplo de los enteros a y b es un número que es igual a :
entero x a y entero x b

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los enteros a y b es el número más pequeño positivo que es común múltiplo de a y de b.

El Mínimo Común Múltiplo de dos enteros se encuentra factorizándolos en números primos, por ejemplo:
6=2(3)
8=2(2)(2)
Para ser un múltiplo de 6, un número debe tener al menos un 2 y al menos un 3 como factores. Para ser múltiplo de 8, un número debe tener cuando menos tres 2's como factores. Así que el Mínimo Común Múltiplo de 6 y 8 tiene tres 2's y un 3.

MCM= $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

En esta sección practicarás obteniendo el MCM de dos polinomios y estarás preparado para encontrar denominadores comunes para sumar expresiones racionales.

OBJETIVO

Dados dos polinomios, encontrar su MCM

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Encuentra el MCM de $12a^2b^4$ y $18a^3bc$

	Por las siguientes razones:
$12a^2b^4 = 2\cdot2\cdot3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$	Factoriza
$18a^3bc = 2\cdot3\cdot3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c$	Factoriza
MCM $= 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot c$	Escoge el número mínimo de factores que son necesarios para cubrir a todos los demás de cada expresión.
MCM $= 36a^3b^4c$	Simplifica

Puedes hacer más simple la obtención del MCM. Tomando los factores con el más grande exponente que tenga en ambas expresiones. Si no es común tómalo con el único exponente que tengan.

EJEMPLO 2

Encuentra el MCM de $9x^3$ y $6x(x+5)^3$

MCM $= 18x^3(x+5)^3$	El MCM de 9 y 6 es 18. Se toma el más grande exponente de x y el único de $(x+5)$

EJEMPLO 3

Encuentra el MCM de $x^2-2x-15$ y x^2-4x-5

$x^2-2x-15 = (x+3)(x-5)$	Factoriza las dos expresiones
$x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$	
MCM $= (x+3)(x-5)(x+1)$	Escribe el MCM $(x-5)$ es un factor común sí que aparece solamente una vez.

EJEMPLO 4

Encuentra el MCM de $x^3-6x+9x$ y $2x^2+2x-24$

PRÁCTICA ORAL

Encuentra el MCM del par de enteros dados

A) 6, 8	B) 15, 12	C) 12, 9
D) 8, 18	E) 7, 21	F) 4, 12
G) 5,4	H) 9,10	I) 4,30

EJERCICIO 3.4

Para los problemas del 1 al 20 encuentra el MCM de las dos expresiones.

1) a^2bc, ab^2c	2) ax^2, $9a^2x$
3) $4x^3$, $6x^4$	4) $6xy^2$, $15x^2y$
5) $42a^3b$, $49b^2c$	6) $56a^5b$, $54a^3z^2$
7) $9x$, $9(a-x)$	8) x^2, $x(x-y)$

9) $5(a-x)$, $3(a+x)$
10) $6(x+3)$, $5(x-3)$
11) $3(a+x)$, $7(a+x)$
12) $9(a-3)$, $11(a-3)$
13) $a^2b(a-b)$, $ab^2(a-b)$
14) $p^3f(p+f)$, $p^4f^3(p+1)$
15) $xyz(x-y)$, xy
16) $a^3b^2(a-b)$, a^2b^3
17) $4a-4b$, $2a-2b$
18) ax^2-9, $6x^2-9x$
19) m^2-9, m^2+3m
20) $6x+12y$, $8x+16y$

Para los problemas del 21 al 26, encuentra el MCM de las tres expresiones.

21) x^3, a^2x^2, a^4
22) m^5, m^3n, mn^2
23) $10x^4$, $12x^2y^2$, $4xy^3$
24) $15r^3$, $21r^2s^3$, $35s^4$
25) $6x^3y^2z^4$, $4xy^3z^2$, $9x^2y^4z$
26) $9a^4b$, $12a^3b^2$, $54a^2b^3$

27) Escribe todos los múltiplos enteros de 2 y todos los múltiplos enteros de 3 que están entre 1 y 20. Encierra en un círculo los pares de múltiplos comunes. Encierra en un cuadro el mínimo común múltiplo.

28) Escribe todos los múltiplos enteros de 12 y todos los múltiplos enteros de 18 que están entre 1 y 100. Encierra en un círculo los pares de múltiplos comunes. Encierra en un cuadro el mínimo común múltiplo.

29) Encuentra el MCM de 24 y 36. Encuentra el máximo factor común de 24 y 36. Comprueba que (MCM) (MFC) = 24x36

30) Encuentra el MCM de 48 y 49. Encuentra el MFC de 48 y 49. ¿Es esto posible para dos enteros como 48 y 49 que tienen como factor común el 1? ¿Cuál es el MFC? Si lo tienes escríbelo, si no, di por que no.

Los problemas del 31 al 42 te dan un breve repaso de la suma y resta de fracciones antes de pasar a la sección 6.5. Suma o resta. Simplifica la respuesta, si es posible.

31) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$
32) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$
33) $\frac{8}{9}-\frac{5}{9}$
34) $\frac{4}{10}-\frac{7}{10}$
35) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
36) $\frac{1}{3}+\frac{5}{2}$
37) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$
38) $\frac{3}{5}-\frac{4}{11}$
39) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$
40) $\frac{1}{6}+\frac{5}{4}$
41) $\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$
42) $\frac{3}{8}-\frac{5}{12}$

3.5 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES

Para sumar dos fracciones, sus denominadores deben ser iguales. En la última sección, el ejemplo dado fué

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}$$

En esta sección sumaremos expresiones algebraicas racionales. Las fracciones tendrán variables en el numerador, en el denominador o en ambos. Por ejemplo, suponiendo que vas a sumar

$$\frac{7}{6x}+\frac{3}{4}$$

El común denominador a usar es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores. Para $6x$ y 4, el MCM es
MCM= $12X$

Multiplicando $\frac{7}{6x}$ por $\frac{2}{2}$ (que es igual a 1) y $\frac{3}{4}$ por $\frac{3x}{3x}$ (que es igual a 1, también) nos da

$$\frac{7}{6x}\cdot\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3x}{3x}=$$
$$=\frac{14}{12x}+\frac{9x}{12x}$$
$$=\frac{14+9x}{12x}$$

Como $12x$ es el MCM de dos denominadores es el llamado Mínimo Común Denominador, o MCD.

Definición

MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR (MCD)
El Mínimo Común Denominador (MCD) de dos fracciones es el MCM de los denominadores.

OBJETIVO

Dadas dos expresiones algebraicas racionales, encuentra el MCD y usa el resultado para sumar o restar las dos expresiones.