

## 4.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES

Una colección de números, signos de operación, y símbolos de agrupación (paréntesis, corchetes, vínculos) es llamada una **expresión**. Encontrar el valor de una expresión es llamado **evaluación** de la expresión, así por ejemplo, en la expresión:

$$3+(7 \times 9)$$

su valor es 66. Consideremos el caso que no se te dice un número en esta expresión.

$$3+(\quad \times 9)$$

Se acostumbra usar una letra tal como x, y o z para simbolizar un número que puede tomar diferentes valores en diferentes ocasiones. En lugar de usar un espacio en blanco, la expresión arriba citada se escribiría:

$$3+(x \times 9)$$

Una letra tal como x es llamada variable.

### Definición

#### VARIABLE:

Una variable es una letra que representa un conjunto de números. (Puede representar diferentes números en diferentes ocasiones, pero representa el mismo número en cada lugar en que aparezca en la expresión).

Para evaluar una expresión conteniendo una variable, debe decirse qué valor usar para la variable. Después, sustituir la variable por ese número y evaluar la expresión. Los símbolos tales como 14, 7.8 ó  $\frac{3}{4}$  que simbolizan al mismo número todo el tiempo son llamados **constantes**.

### Definición

#### SUSTITUIR

Sustituir significa reemplazar una variable por una constante (tal como 3, 158, 1001, etc.)

### EJEMPLO 1

Sustituye x por 4 y después evalúa  $(15-x) \times 3$

#### Solución

$$\begin{aligned} &(15-x) \times 3 \\ &=(15-4) \times 3 \\ &=11 \times 3 \\ &=33 \end{aligned}$$

Escribe la expresión dada  
Sustituye 4 en lugar de x  
Efectúa las operaciones  
Da la respuesta

#### NOTA:

Asegúrate de usar signos de = para señalar que la primera expresión es igual a la siguiente, y así sucesivamente.

### EJEMPLO 2

Sustituye x por 9 y evalúa  $(15-x) \times 3$

#### Solución

$$\begin{aligned} &(15-x) \times 3 \\ &=(15-9) \times 3 \\ &=6 \times 3 \\ &=18 \end{aligned}$$

Escribe la expresión dada  
Sustituye x por 9  
Efectúa las operaciones  
Da la respuesta.

#### NOTA:

La misma expresión tiene diferentes valores cuando diferentes números son sustituidos en lugar de la variable.

Ya que has aprendido cómo encontrar el valor de una expresión cuando se conoce el valor de x, ahora encontrarás el valor de x cuando se conoce a qué es igual la expresión. Por ejemplo, si la expresión es  $x+5$ , y se sabe que es igual a 17, entonces se puede escribir

$$x+5=17$$

Esto es llamado una ecuación. La expresión del lado izquierdo es llamada el miembro izquierdo y la expresión en el lado derecho es llamada el miembro derecho.

Para encontrar el valor de x, debes tener a x sola en un lado de la ecuación. Para hacer esto debes deshacerte del 5 en el miembro izquierdo. Puedes restar 5 de cada miembro, obteniendo:

$$x+5-5=17-5$$

simplificando:

$$x=12$$

como puedes ver,  $12+5$  realmente es igual a 17.

#### OBJETIVO:

Dado el valor de una expresión, ser capaz de encontrar el valor de la variable.

**EJEMPLO 3**

Para la expresión  $x-7$ , encuentra  $x$  cuando la expresión es igual a 15

1° Escribe una ecuación  
 $x-7=15$

2° Piensa cómo deshacerte del 7 en el miembro izquierdo de manera que la  $x$  quede sola. Sumando 7 a cada miembro dejarás sola la  $x$ .  
 $x-7+7=15+7$

3° Realiza las operaciones  
 $x=22$

O también como el 7 está restando en el primer miembro, pasa restando al segundo miembro quedando :  $x = 15 + 7$   
 $x = 22$

**EJEMPLO 4**

Para la expresión  $\frac{1}{3}x$ , encuentra  $x$  si la expresión es igual a 13.

Tu proceso de razonamiento puede ser: **Quiero dejar la  $x$  sola. Así que debo deshacerme de  $\frac{1}{3}$ . Para hacer esto puedo multiplicar cada miembro por 3.**

$$\frac{1}{3}x=13$$

Escribe la ecuación

Multiplica cada miembro por 3

Haz las operaciones para que la  $x$  quede sola.

$$3\left(\frac{1}{3}x\right)=3(13)$$

Da la respuesta.

$$x=39$$

Nota : También podemos pasar el 3 ; que esta como divisor en el primer miembro como factor al segundo miembro.

**EJEMPLO 5**

Para la expresión  $7x$ , encuentra  $x$  cuando su valor es igual a 42.

$$7x=42$$

Escribe la ecuación

$$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$$

Divide cada miembro entre 7 para deshacernos del 7

que está multiplicando a la  $x$ . Haz las operaciones para que la  $x$  quede sola.

O también como el 7 es factor en el primer miembro lo

pasamos como divisor al segundo miembro.

En la exposición anterior aprendiste cómo encontrar el valor de  $x$  si se te daba el valor de una expresión conteniendo  $x$ . Por ejemplo, restando 5 de cada miembro de la ecuación

$$x+5=17$$

encuentras

$$x=12$$

si sustituyes el número 12 en lugar de  $x$  en la ecuación original, obtienes

$$12+5=17$$

El número 12 en este ejemplo se llama la solución de la ecuación. El proceso de encontrar todos los valores de la variable que hagan la ecuación verdadera es llamado resolución de la ecuación. Llevar a cabo un paso tal como restar 5 de cada miembro de la ecuación es llamado transformación de la ecuación. Así que para resolver una ecuación, todo lo que necesitas hacer es transformarla hasta que quede:

$$x = \text{algún número}$$

La transformación particular que seleccionas es la que deja la variable sola deshaciéndote de los números no deseados que acompañan a la variable.

$$x-2=7$$

Sumar 2 a cada miembro para deshacerse del 2

$$x+3=8$$

Restar 3 a cada miembro para deshacerse del 3

$$\frac{1}{5}x=9$$

Multiplicar cada miembro por 5 para deshacerse del 5

$$6x=2$$

Dividir cada miembro entre 6 para deshacerse del 6

**EJEMPLO 6**

Resuelve  $x-3=5$ . Muestra la transformación:

$$x-3=5$$

Escribe la ecuación

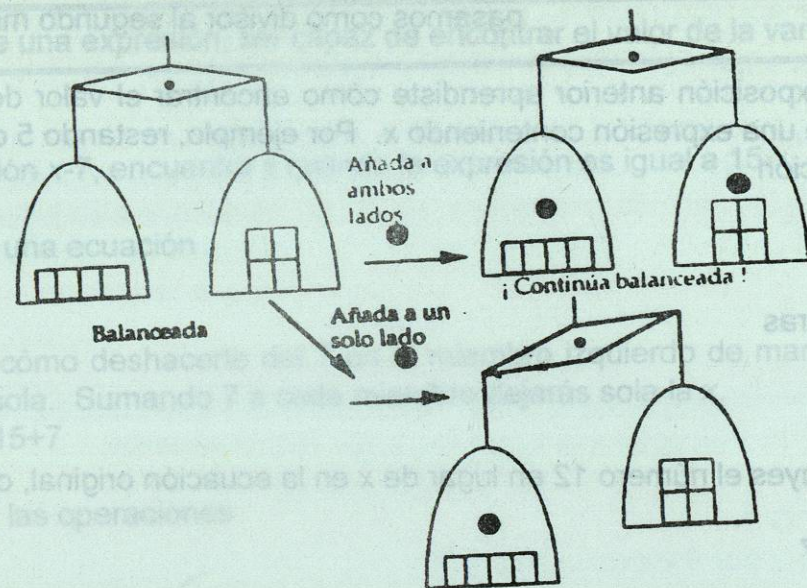
$$x-3+3=5+3$$

Suma 3 a cada miembro

$$x=8$$

Realiza las operaciones

Una transformación como añadir 3 a cada miembro puede ser pensada como si se añadieran pesos iguales a ambos lados de una balanza. Si estaba balanceada antes, debe balancearse después de hacer transformaciones. Pero si añades peso solamente a un lado, ¡Nunca se balancea!



**Nota:** Siempre hay que mantener el "equilibrio" en una ecuación; es decir; las operaciones que efectúes en el miembro izquierdo de la ecuación las debes realizar también en el derecho.

Tienes que aprender la diferencia entre las palabras ecuación, solución y transformación. Enseguida aparecen las definiciones formales para estos conceptos.

**Definiciones:**

**ECUACIÓN**

Una ecuación es una proposición (tal como  $x+3=5$ ) que nos dice que dos expresiones son iguales.

**SOLUCIÓN**

Una solución de una ecuación es un número que si se sustituye en lugar de la variable hace que la proposición sea verdadera (por ejemplo, 2 es una solución de  $x+3=5$  porque  $2+3=5$ )

**TRANSFORMAR UNA ECUACIÓN**

Transformar una ecuación significa hacer la misma operación a cada miembro de la ecuación.

Las expresiones algebraicas pueden ser usadas para representar cosas tales como el perímetro y el área de un rectángulo u otro tipo de cantidades. Con respecto a la expresión, puedes evaluarla o resolver una ecuación para obtener respuestas a problemas de la vida real.

**EJEMPLO 7**

Un cocinero gana \$16.00 por día más que un mesero. Si  $x$  es el número de pesos por día que gana el mesero. Contesta las siguientes preguntas.

- Escribe una expresión para los pesos por día que gana el cocinero.
- Si el mesero gana \$35.00 por día, ¿cuánto gana el cocinero?
- Si el mesero obtiene un aumento de \$40.00 por día, ¿cuánto ganará el cocinero?
- Si el cocinero gana \$65.00 por día, ¿cuánto gana el mesero?

**Solución**

a. Mesero:  $x$  pesos por día  
Cocinero:  $x+16$  pesos por día  
Escribe la variable dada  
El cocinero gana \$16.00 más. Así que debe añadirse 16 a  $x$ .

b.  $x+16$   
 $= 35+16$   
 $=51$   
Escribe la expresión de (a)  
Sustituye 35 en lugar de  $x$   
Ejecuta la operación aritmética

El cocinero gana \$51.00 por día Responde la pregunta

c.  $x+16$   
 $=40+16$   
 $=56$   
Escribe la expresión de (a)  
Sustituye 40 en lugar de  $x$   
Ejecuta la operación aritmética

El cocinero ganará \$56.00 por día Responde la pregunta

d.  $x+16=65$   
 $x+16-16=65-16$   
 $x=49$   
Iguala la expresión del cocinero a 65.  
Resta 16 a cada miembro  
Efectúa las operaciones

El mesero gana \$49.00 por día Responde la pregunta

**EJEMPLO 8**  
**Problema de genes**

Si los padres tienen cierta combinación de genes, entonces cerca de  $\frac{1}{4}$  de sus hijos tendrá cabello claro. Permite que  $x$  sea el número de niños nacido de un grupo de parejas con estos genes.

- Escribe una expresión para el número de niños con cabello castaño claro.
- Si éstas parejas tuvieran un total de 532 niños, ¿cuántos de ellos serían castaños claros?
- ¿Cuántos niños necesitarían las parejas tener para que hubiera 240 niños con cabello castaño claro?

**Solución**

a. Número total:  $x$   
castaño claro:  $\frac{1}{4}x$

Escribe la expresión de (a)

b.  $\frac{1}{4}x$   
 $= \frac{1}{4}(532)$   
 $= 133$   
133 niños

Escribe la expresión de (a)

Sustituye 532 por  $x$   
Efectúa las operaciones  
Responde la pregunta

c.  $\frac{1}{4}x=240$   
 $= 4(\frac{1}{4}x)=4(240)$   
 $x=960$   
960 niños

Escribe la ecuación  
Multiplica cada miembro por 4  
Efectúa las operaciones  
Responde la pregunta

**EJERCICIO 4.1**

Calcular las siguientes expresiones:

- $5+(7 \times 8)$
- $36 \div (2 \times 6)$

- $(8 \times 7) - 13$
- $16 - [(3 \times 2) - 4]$

Para los problemas del 5 al 8, evalúa las expresiones sustituyendo los valores dados de la variable:

- $5+x$ , si:  
a)  $x$  es 4;  
b)  $x$  es 17.

- $(z-19) \times 2$ , si:  
a)  $z$  es 100;  
b)  $z$  es 37;  
c)  $z$  es 19.

- $\frac{30}{x}$ , si:  
a)  $x$  es 6;  
b)  $x$  es 90.

- $7x$ , si:  
a)  $x$  es 8;  
b)  $x$  es 11.

- Para la expresión  $x-3$ , encuentra  $x$  cuando la expresión es igual a:  
a) 7                      b) 1                      c) 20  
d) 100                    e) 1998

- Para la expresión  $x+8$ , encuentra  $x$  cuando la expresión es igual a:  
a) 10                      b) 17                      c) 35  
d) 107                    e) 1776

- Para la expresión  $\frac{1}{2}x$ , encuentra  $x$  cuando la expresión es igual a:  
a) 5                      b) 13                      c) 50  
d) 111                    e) 65

- Para la expresión  $5x$ , encuentra  $x$  cuando la expresión es igual a:  
a) 10                      b) 75                      c) 1000  
d) 15                      e) 27

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Muestra los pasos de cada transformación.

- $x-10=17$
- $x+4=13$
- $5x=90$

- $x-8=13$
- $x+9=21$
- $6x=22$

- $\frac{1}{3}x=29$

- $\frac{1}{5}x=23$

- $x-16=7$

- $x-17=8$

- $x-32=95$

- $x-45=89$

- $x+58=74$

- $x+43=91$

- $x+91=247$

- $x+79=422$

- $12x=132$

- $15x=210$

- $8x=1000$

- $4x=100$

- $\frac{1}{7}x=68$

- $\frac{1}{9}x=58$

- Supongamos que  $\frac{3}{4}$  de los estudiantes en una escuela son de primer año.

Si  $x$  representa al número total de estudiantes:

- Escribe una expresión representando el número de estudiantes de primer año.
- Escribe una ecuación donde especifique que el número de estudiantes de primer año es 312.
- Encuentra el número de estudiantes de la escuela.

36. Carlos es 4 años más joven que su hermano Rogelio. Si  $x$  es la edad de Rogelio:
- Escribe una expresión para la edad de Carlos.
  - Escribe una ecuación especificando que la edad de Carlos es 76.
  - Encuentra la edad de Rogelio resolviendo la ecuación.
37. Ricardo recibe \$3.00 menos por semana que su hermana mayor Martha. Si  $x$  representa la cantidad que Martha obtiene por semana.
- Escribe una expresión para la cantidad que Ricardo obtiene por semana.
  - Escribe una ecuación especificando que Ricardo obtiene \$11.00 por semana.
  - Encuentra la cantidad de dinero que recibe Martha resolviendo la ecuación.
38. Jaime maneja una tienda de venta de menudeo. En cada artículo vendido, él obtiene un beneficio del 20%, lo cual significa que lo vende a 1.2 veces de lo que pagó por el artículo. Si  $x$  es la cantidad de dinero que él pagó por un artículo:
- Escribe una expresión que represente el precio de venta de un artículo.
  - ¿Cuál es el precio de venta de:
    - Una bandera por la cual pagó \$5.00;
    - Un sartén por el cual pagó \$9.00;
    - Un escritorio por el cual pagó \$140.00?
  - Encuentra cuánto pagó Jaime por:
    - Un maletín que vende a \$84.00;
    - Un reloj que vende a \$13.20
39. Las reglas de una compañía constructora dicen que un supervisor gana 1.5 veces más que un jornalero. Si  $x$  es el salario por hora que gana un jornalero:
- Escribe una expresión para el salario por hora que gana un supervisor.
  - Rodrigo es un jornalero que gana \$6.00 por hora, ¿cuánto ganará el supervisor?
  - Si el pago de Rodrigo es incrementado a \$8.00 por hora, ¿cuánto ganará el supervisor?
  - Supongamos que un supervisor gana \$9.60 por hora, ¿cuánto gana un jornalero bajo estas condiciones?
40. El número de segundos que tarda el sonido de un trueno para escucharlo es 3 veces la distancia en kilómetros a que cayó el rayo. Si  $x$  es la distancia en kilómetros a que cayó el rayo:
- Escribe una expresión para el número de segundos que toma para escuchar el sonido de un trueno.

- ¿Cuánto tiempo tarda en escuchar el sonido de un trueno si el rayo cayó a:
  - 5 km
  - 2.8 km
- Escribe una ecuación especificando que el sonido se tarda 12 segundos en escucharse. Después resuélvela para encontrar su distancia al lugar donde cayó el rayo.

## 4.2 ECUACIONES QUE NECESITAN DOS TRANSFORMACIONES

Has resuelto ecuaciones sumando (o restando) un número  $a$  (o de) cada miembro. También has resuelto ecuaciones multiplicando (o dividiendo) cada miembro por un número. Algunas ecuaciones requieren ambas transformaciones. Por ejemplo, para resolver

$$\frac{1}{5}x + 4 = 13$$

primero debes restar 4 de cada miembro y obtenemos

$$\frac{1}{5}x + 4 - 4 = 13 - 4$$

$$\frac{1}{5}x = 9$$

De aquí, la ecuación es similar a las que has resuelto antes. Multiplicando cada miembro por 5 nos da:

$$5\left(\frac{1}{5}x\right) = 5(9)$$

$$x = 45$$

Para estar seguro que la respuesta es correcta, debes comprobar la solución sustituyendo el valor de  $x$  en el lado izquierdo de la ecuación original y mostrando que obtienes la respuesta del lado derecho.

**Comprobación:**

$$\frac{1}{5}x + 4$$

$$= \frac{1}{5}(45) + 4$$