

- b) Escribe una ecuación que exprese que las llaves de agua caliente y fría han descargado el mismo número de litros.
- c) La bañera contiene 100 litros. ¿Se desbordará para el tiempo que las llaves de agua caliente y fría han descargado la misma cantidad de agua?

16. Problema del carro patrulla.

Un camión pasa por una estación de patrullas a una velocidad de 70 millas por hora. Cuando el camión está a 10 millas de la estación un carro patrullero sale a seguirlo a una velocidad de 100 millas por hora. La variable T es el número de horas que el carro patrullero se ha desplazado.

- a) Escribe lo que representa T . Después escribe dos expresiones, una representando la distancia recorrida por la patrulla y la otra la del camión después de T horas.
- b) Si ellos continúan a la misma velocidad, ¿Quién estará más lejos de la estación?
- i) A los 10 minutos de salir la patrulla
- ii) A los 30 minutos de salir la patrulla
- c) ¿En qué tiempo alcanza la patrulla al camión?
- d) Demuestra que las dos distancias son iguales en el tiempo que calculaste en la parte c.

17. El puma y el ciervo.

Un puma descubre a un ciervo a 132 metros de distancia. El puma avanza hacia el ciervo a una velocidad de 18 metros por segundo (m/seg). En el mismo instante el ciervo empieza a correr alejándose a 11 m/seg. Representa por x el número de segundos que el puma y el ciervo han estado corriendo.

- a) Escribe lo que representa x . En seguida escribe expresiones para las distancias que el puma y el ciervo han corrido desde el punto de partida después de x segundo.
- b) ¿Qué tan lejos está el puma del ciervo después de 8 segundos?
- c) Escribe una ecuación expresando que la distancia entre el puma y el ciervo (la distancia del ciervo menos la distancia del puma) es igual a 60 metros. Resuelve la ecuación para saber cuándo están separados 60 metros.
- d) El puma tiene suficiente energía para correr 17 segundos. ¿Alcanzará al ciervo antes que se termine su energía? Justifica tu respuesta.

18. Problema de persecución.

Rubén roba un banco y se aleja en su carro con una rapidez de 1.7 km por minuto (km/min); 5 minutos más tarde la policía persigue a Rubén con una rapidez de 2.9 km/m. Usa T para representar el número de minutos que Rubén ha estado manejando su carro.

- a) Escribe lo que representa T . En seguida escribe una expresión representando la distancia recorrida por Rubén.
- b) En términos de T ¿cuánto tiempo ha estado la policía conduciendo la patrulla? Escribe una expresión representando la distancia recorrida por la policía.

- c) Cuando la policía alcanza a Rubén las distancias recorridas son iguales. Escribe una expresión expresando este hecho y resuelve para saber cuándo alcanzará la policía a Rubén.

19. Apagado de motores de un avión.

Un avión inicia un vuelo nocturno con todos sus motores encendidos. Su velocidad es de 900km/hora. Después de estar volando por x horas el piloto apaga un motor para conservar combustible. La velocidad es reducida a 700 km/hora. El avión vuela un total de 3 horas.

- a) Dibuja un diagrama mostrando el punto de partida y terminación del viaje. En algún lugar del recorrido marca el punto donde el motor fue apagado. Muestra la distancia en que voló a 900km/hora y la distancia que voló a 700 km/hora.
- b) Escribe una expresión para el tiempo en que se voló a 700 km/hora y la distancia recorrida a esa velocidad, así como cuando se voló a 900 km/hora.
- c) Si el avión vuela 1.3 horas antes de apagar una máquina, ¿Cuántos km cubre en un total de tres horas?
- d) ¿Cuánto tiempo debe volar el piloto antes de apagar el motor para recorrer una distancia total de 2352 km en tres horas?
- e) ¿Cuánto tiempo debe volar el piloto antes de apagar el motor para recorrer una distancia total de 2970 km en tres horas?

4.9 ECUACIONES FRACCIONALES Y SOLUCIONES EXTRAÑAS

En esta sección aprenderás a resolver ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador de una fracción algebraica.

EJEMPLO

$$\frac{x-5}{x+4} = 9$$

Ecuaciones semejantes a éstas que tienen una variable en el denominador son llamadas ecuaciones fraccionales.

Definición

ECUACIÓN FRACCIONAL

Una ecuación fraccional es una ecuación que tiene como mínimo una variable en algún denominador.

Ahora que conoces cómo trabajar con expresiones racionales, estás preparado para resolver ecuaciones fraccionales tal como:

$$\frac{3}{x} + \frac{6}{5} = \frac{1}{4x}$$

El camino a resolver un nuevo problema es transformarlo en un viejo problema. Para las ecuaciones fraccionarias, esto significa procurar eliminar los denominadores de las fracciones. La técnica es multiplicar cada miembro de la ecuación por el MCM de todos los denominadores. El MCM de x , 6 y 4 es $12x$. Así que escribe

$$12x\left(\frac{3}{x} + \frac{6}{5}\right) = 12x\left(\frac{1}{4x}\right)$$

En el lado derecho, $4x$ divide a $12x$ y es 3 ; en el lado izquierdo, se distribuye $12x$ en cada término.

$$12x\left(\frac{3}{x}\right) + 12x\left(\frac{6}{5}\right) = 3(1)$$

La cancelación ahora puede hacerse en cada término de la izquierda, dando $12(3) + 2x(5) = 3(1)$

Multiplicando da:

$$\begin{aligned} 36 + 10x &= 3 \\ 10x &= -33 \\ x &= -3.3 \end{aligned}$$

Por lo tanto $S = \{-3.3\}$

Comprobación:

$$\frac{3}{-3.3} + \frac{6}{5} = \frac{1}{4(-3.3)}$$

$$\begin{aligned} -.90909\dots + .83333\dots &= -.07575\dots \\ -.07575\dots &= -.07575\dots \end{aligned}$$

Algunas veces hay sorpresas cuando resuelves ecuaciones fraccionales. Como en

$$\frac{3}{x-2} - \frac{6}{x^2-2x} = 1$$

El MCM de los denominadores (el MCD) se encuentra por factorización

$$\frac{3}{x-2} - \frac{6}{x(x-2)} = 1$$

Así que el MCD es $x(x-2)$. Multiplicando cada miembro por este número da:

$$x(x-2)\left(\frac{3}{x-2} - \frac{6}{x(x-2)}\right) = x(x-2)(1)$$

Distribuyendo en el lado izquierdo y en el lado derecho da:

$$x(x-2) \cdot \left(\frac{3}{x-2}\right) - x(x-2) \cdot \frac{6}{x(x-2)} = x^2 - 2x$$

Cancelando en el lado izquierdo resulta:

$$3x - 6 = x^2 - 2x$$

Restando $3x$ y sumando 6 en cada miembro de la ecuación da:

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

Esta es una ecuación cuadrática conocida. En este caso el miembro de la derecha se factoriza y nos da:

$$0 = (x-2)(x-3)$$

Igualando cada factor a 0 se tiene:

$$\begin{array}{ll} x-2=0 & \text{ó} & x-3=0 \\ x=2 & \text{ó} & x=3 \end{array}$$

La sorpresa viene cuando haces la comprobación:

$$x=2:$$

$$\frac{3}{2-2} - \frac{6}{4-4} = 1$$

$$\frac{3}{0} - \frac{6}{0} = 1$$

¡No es cierto!

$$x=3:$$

$$\frac{3}{3-2} - \frac{6}{9-4} = 1$$

$$1=1$$

En este ejemplo, el 2 satisface la ecuación transformada $0=x^2-5x+6$. Pero no satisface la ecuación original. A tal número se le llama una ***solución extraña***.

Definición

SOLUCIONES EXTRAÑAS

Una solución extraña es un valor de la variable que satisface la ecuación transformada, pero no la ecuación original.

La dificultad surge porque x no puede ser igual a 2 en la ecuación original.

Las fracciones son indefinidas si sus denominadores son cero. Tan pronto como encuentres que el MCD es $x(x-2)$, debes enunciar que $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

Se dice que éstos números no pertenecen al dominio de la variable.

Definición

DOMINIO

El dominio de una variable es el conjunto de números que pueden ser valores de la variable.

NOTA: El dominio de la variable debe excluir todos los números que hagan algún denominador igual a cero.

Cuando encuentras el MCD para la ecuación anterior, debes escribir:

MCD = $x(x-2)$

Exclusiones del dominio: $x=0$ y $x=2$.

Al final del problema deberás eliminar cualquier solución extraña antes de que escribas el conjunto solución

Por lo tanto: $S=\{3\}$

OBJETIVO

Estás apto para resolver ecuaciones racionales, descartando cualquier solución extraña.

Cubre las columnas de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelve: $\frac{7}{2x} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$

$\frac{7}{2x} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$

Escribe la ecuación dada

MCD: $10x$

Exclusiones del dominio
 $x=0$

$10x\left(\frac{7}{2x} - \frac{3}{5}\right) = 10x\left(\frac{1}{10}\right)$

$5(7) - 2x(3) = x(1)$

$35 - 6x = x$

$-7x = -35$

$x=5$

$\therefore S = \{5\}$

EJEMPLO 2

Resuelve $\frac{3}{x-5} + \frac{3}{x-5} = 7$

$\frac{3}{x-5} + \frac{3}{x-5} = 7$

MCD $(x-5)(x+5)$

exclusiones del dominio
 $x=5, x=-5$

$\left(\frac{3}{x-5} + \frac{3}{x+5}\right)(x-5)(x+5) = 7(x-5)(x+5)$

$3(x+5) + 3(x-5) = 7(x^2-25)$

$3x+15+3x-15=7x^2-175$

$6x=7x^2-175$

$0=7x^2-6x-175$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(7)(-175)}}{2(7)}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{4936}}{14}$

Escribe el MCD y la exclusión del dominio

Multiplica cada miembro por el MCD

Distribuye $10x$ y cancela

Multiplica

Resta 35 y resta x

Divide por -7

Escribe el conjunto solución (5 no es excluido del dominio. Así que ésta es la solución).

Escribe la ecuación dada

Escribe el MCD y las exclusiones del dominio

Multiplica cada miembro por el MCD

Distribuye y cancela en el lado izquierdo. Multiplica en el lado derecho.

Distribuye

Combina términos semejantes

Haz un miembro igual a cero

Usa la fórmula cuadrática

Efectúa operaciones

$x \approx 5.45$ ó $x \approx -4.59$

$\therefore S = \{5.45, -4.59\}$

EJEMPLO 3

Resuelve $\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 9$

$\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 9$

MCD: $x-3$ exclusión del dominio
 $x=3$

$\left(\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3}\right)(x-3) = 9(x-3)$

$2x-6=9x-27$

$-7x=-21$

$x=3$ (extraña)

$\therefore S = \emptyset$

PRÁCTICA ORAL

Proporciona el MCD y las restricciones del dominio

Ejemplo

$\frac{3}{x+5} = \frac{7}{x+2}$

a) $\frac{x-4}{x} = \frac{5}{2x}$

c) $\frac{x-6}{2x} = \frac{9}{2x}$

Redondea el número a decimales

Escribe el conjunto solución. (Ningún valor de x está excluido del dominio. Así que ambos valores son soluciones).

Escribe la ecuación dada

Escribe el MCD y la exclusión del dominio

Multiplica cada miembro por el MCD

Distribuye y cancela

Suma 6, resta $9x$

Divide por -7 , descarta la solución extraña

Escribe el conjunto solución (como la única solución posible está fuera del dominio, el conjunto solución es vacío)

Respuesta

MCD = $(x+5)(x+2)$

Dominio: $x \neq -5, x \neq -2$

b) $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{2x}{x-7} = \frac{2x}{9}$

e) $\frac{x+5}{x+4} = 5$

f) $\frac{x-6}{x+4} = \frac{x-5}{x-4}$

g) $\frac{x+7}{x} = \frac{6}{x-2}$

h) $\frac{x+3}{5} = \frac{6}{x-2}$

i) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{4}$

EJERCICIO 4.9

Para los problemas del 1 al 24, resuelve la ecuación; descarta cualquier solución extraña.

1) $\frac{4x-3}{x} = \frac{17}{x}$

2) $\frac{3x-8}{x} = \frac{13}{x}$

3) $\frac{11}{x} = \frac{7x+5}{3x}$

4) $\frac{7x}{x} = \frac{4x-1}{5x}$

5) $\frac{a-2}{a} - \frac{7}{3a} = \frac{3}{4a}$

6) $\frac{x-3}{x} - \frac{6}{5x} = \frac{7}{2x}$

7) $\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$

8) $\frac{1}{50} + \frac{1}{m} = \frac{1}{30}$

9) $\frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{1}{a}$

10) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$

11) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{7}$

12) $\frac{x}{x+4} = \frac{8}{3}$

13) $\frac{3}{2a} = \frac{5}{a-7}$

14) $\frac{7}{3x} = \frac{4}{y-2}$

15) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = 8$

16) $\frac{8}{x-2} - \frac{x}{x-2} = 5$

17) $\frac{4}{a+2} - \frac{a}{a+2} = 3$

18) $\frac{y}{y+6} - \frac{y}{y+6} = 11$

19) $\frac{8}{m+6} - \frac{8}{m-6} = 1$

20) $\frac{3}{x-4} - \frac{3}{x+4} = 1$

$$21) \frac{2}{x+5} - \frac{1}{x-3} = 3$$

$$23) \frac{x}{x+2} - \frac{7}{x+4} = 2$$

Para los problemas del 25 al 34, suma o resta las fracciones y simplifica la respuesta. Recuerda que éstas son expresiones, no ecuaciones. No puedes quitar denominadores multiplicando por el MCD.

$$25) \frac{8}{5x} + \frac{7}{10x}$$

$$27) \frac{2}{y+1} + \frac{3}{y+4}$$

$$29) \frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3}$$

$$31) \frac{a^2}{x-6} - \frac{36}{x-6}$$

$$33) \frac{5}{x-2} - \frac{4}{2-x}$$

$$22) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+4} = 5$$

$$24) \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+3} = 2$$

$$26) \frac{7}{6y} + \frac{5}{3y}$$

$$28) \frac{5}{x+3} + \frac{2}{x+1}$$

$$30) \frac{7}{x+3} + \frac{7}{x+3}$$

$$32) \frac{x^2}{x-3} - \frac{9}{x-3}$$

$$34) \frac{8}{x-4} - \frac{3}{4-x}$$

4.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN RAZÓN Y PROPORCIÓN

Si alguien dice que los hombres y mujeres en un grupo están en una razón de 3 a 8, esto significa que:

$$\frac{\text{No. Hombres}}{\text{No. Mujeres}} = \frac{3}{8}$$

Existen varias maneras para que esta igualdad sea verdadera por ejemplo habrá 3 hombres y 8 mujeres o habrá 6 hombres y 16 mujeres porque:

$$\frac{6}{16} = \frac{(3)(2)}{(8)(2)} = \frac{3}{8}$$

El número de hombres debe ser un múltiplo de 3 y el número de mujeres debe ser el mismo múltiplo de 8. Esto significa que hay un número natural no nulo x tal que:

$$3x = \text{Número de hombres}$$

$$8x = \text{Número de mujeres}$$

El número x es un factor común del número de hombres y el número de mujeres. Suponiendo que además de conocer la razón 3:8 (forma abreviada para escribir la razón 3 a 8), también conoces que hay un total de 407 personas en el grupo. ¿Cuántos habrá de cada uno?

Entonces $3x$ es el número de hombres y $8x$ es el número de mujeres, luego puedes escribir:

$$3x + 8x = 407$$

$$11x = 407$$

$$x = 37$$

Así que hay $3(37) = 111$ hombres y $8(37) = 296$ mujeres. En esta sección trabajarás más problemas incluyendo razones de dos enteros.

OBJETIVO

Dadas dos cantidades hallar la razón entre ellas en forma de fracción irreducible.

Dada la razón entre dos magnitudes e información adicional necesaria hallar las magnitudes.

Cubre las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.