b) Evalúa la expresión de la parte a si 1000 galones de gasolina con octano 84 se mezclan con 2000 galones de gasolina de octano 91.

c) ¿Cuál sería el número de octanaje de la mezcla de la parte b)?

d) Si la bomba recibe una orden de 15000 galones de gasolina de octano 89.7. ¿Qué cantidad de cada tipo de gasolina debe ser mezclada para surtir la orden?

19) **Problema de aleación de plata.**
Las monedas antiguas de plata contienen 90% de plata. La soldadura de plata contiene 63% de plata. Si quieres hacer 200 kg de una aleación que contenga 82% de plata. ¿Cuántos kg de monedas antiguas y cuántos kg de soldadura de plata tendrías que fundir para lograr esto?

20) **Problema de aleación de bronce.**
Supongamos que tienes un lote de chatarra. Tú tienes vastas cantidades de bronce amarillo (67% cobre, 33% zinc) y bronce rojo (85% cobre, 15% zinc) a la mano. La compañía Al Oye envía un pedido por 55 toneladas de bronce que contenga 80% de cobre y 20% de zinc. ¿Cuántas toneladas de cada clase de bronce tendrías que fundir juntas para surtir el pedido?

CAPÍTULO 6

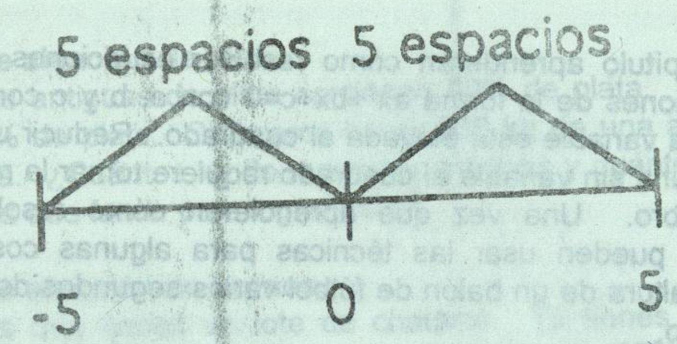
ECUACIONES CUADRÁTICAS

En este capítulo aprenderán cómo resolver ecuaciones cuadráticas, es decir ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ con a, b y c constantes y $a \neq 0$, las cuales la variable está elevada al cuadrado. Reducir una ecuación de este tipo a una sin variable al cuadrado requiere tomar la raíz cuadrada de cada miembro. Una vez que aprendieron cómo resolver ecuaciones cuadráticas pueden usar las técnicas para algunas cosas tales como predecir la altura de un balón de fútbol varios segundos después de haber sido pateado.

Variable: t	Número de segundos desde que el balón fue pateado.
Expresión: $25t-5t^2$	Número de metros sobre el suelo.
Ecuación: $25t-5t^2=20$	Dice que el balón esta 20 metros arriba.

6-1 ECUACIONES QUE CONTIENEN VALOR ABSOLUTO Y ECUACIONES CON CUADRADOS

El valor absoluto de un número es la distancia entre ese número y el origen en una recta numérica.



Si el número dentro del valor absoluto tiene signo positivo, como en $|3|$ entonces su valor absoluto es el número mismo $|3| = 3$ (es el opuesto de -3).

Si el número dentro del valor absoluto es el 0, entonces su valor absoluto es 0 (ya que no tiene signo).

Ahora estás listo para aprender una definición formal de valor absoluto.

Definición

VALOR ABSOLUTO
El valor absoluto de un número es el número mismo o el opuesto del número, cualquiera que sea: positivo (o cero)
Esto es:
$|n| = n$, si n es positivo (ó 0)
$|n| = -n$, si n es negativo

Observa que n es el opuesto de -n. Por ejemplo el opuesto de -7, escrito -(-7), es 7 el cual es un número positivo.

Un número positivo como el 9, tiene dos diferentes números como su valor absoluto estos son:

$|-9| = 9 \quad |+9| = 9$

Si la variable apareciera dentro del valor absoluto $|x| = 9$, significaría que la *"x"* puede tomar dos valores: $x=9$ ó $x=-9$.

Así que la ecuación tiene dos soluciones, 9 y -9. Por lo tanto, la solución puede ser escrita en la forma de un conjunto solución.

Para $|x| = 9$ el conjunto solución es S={9,-9}.

Nota: La letra "S" se utiliza como conjunto solución.
Las llaves son símbolos usados para el conjunto solución.
Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución.

Así que ya puedes resolver ecuaciones del tipo $|x-3| = 5$.

Solución:

$\lvert x-3 \rvert = 5$	Escribe la ecuación dada
$x-3=5$ ó $x-3=-5$	La expresión x-3 necesariamente puede ser 5 ó -5.
$x=5+3 \quad x=-5+3$	Sumando 3 a cada miembro
$x=8 \quad x=-2$	
S={8,-2}	

De una manera semejante puedes resolver ecuaciones con cuadrados tal como : $(x-3)^2=25$, ya que ésta ecuación puede ser transformada en la anterior tomando la raíz cuadrada de cada miembro.

PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA RAÍZ CUADRADA
Si dos números positivos son iguales, entonces sus raíces cuadradas positivas son iguales.
Así que si a=b, entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

Para que comprendas porqué la transformación puede ser realizada, veamos la siguiente operación:

$\sqrt{(-7)^2}$

Primero eleva al cuadrado

$\sqrt{49}$

Ya que $(-7)^2=49$, segundo, toma la raíz cuadrada, la cual es 7.

El número con el que empezaste era el -7 y la respuesta es +7, el cual es el valor absoluto de -7, escrito ½-7½. Así que:

$\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$

Por lo tanto

Conclusión

> La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es:
> $\sqrt{(\text{numero})^2}=|\text{numero}|$

Así que también puedes resolver ecuaciones como la siguiente:

$(x-3)^2=25$

Solución:

$(x-3)^2=25$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{25}$	Tomando raíz cuadrada en ambos miembros
½x-3½=5	ya que $\sqrt{(\text{numero})^2}=|\text{numero}|$ y $\sqrt{25}=5$
$x-3=\pm 5$	Definición de valor absoluto
$x=3\pm 5$	Sumando 3 a ambos lados
S={8,-2}	Escribe el conjunto solución

OBJETIVO

> - Dada una ecuación que involucre el valor absoluto de una expresión con variable, encuentra el conjunto solución.
> - Puedes resolver ecuaciones del tipo $(x-3)^2=25$, en la cual el cuadrado de un binomio es igual a una constante.

EJEMPLO 1

Encuentra el conjunto solución de: $|3x-2|=32$

$|3x-2|\ 32$	Escribe la ecuación dada
$3x-2=\pm 32$	La expresión 3x-2 necesariamente debe ser 32 o -32
$3x=\pm 32+2$	Sumando 2 a ambos lados
$x=\frac{34}{3}$ ó $x=\frac{-30}{3}$	Dividiendo entre 3 y 32+2=34, 32+2=-30
$S=\{\frac{34}{3},-10\}$	Escribir el conjunto solución.

EJEMPLO 2

Encuentra el conjunto solución de $|x+3|=-5$

No hay soluciones. Un valor absoluto son siempre positivos o cero. Por lo tanto el conjunto solución no tiene números en él. Este es llamado conjunto vacío. Hay dos maneras de escribir el conjunto vacío:

S=∅ o S={ }

En ambos casos la S es igual a conjunto vacío o S es igual a conjunto nulo.

EJEMPLO 3

Encuentra el conjunto solución de $30-|x+5|=17$

$30-|x+5|=17$	Escribe la ecuación dada
$-|x+5|=-13$	Resta 30 en cada miembro
$|x+5|=13$	Multiplica cada miembro por -1. (De ahora en adelante el problema es exactamente igual al anterior)
$x+5=\pm 13$	La expresión dentro del valor absoluto debe de ser 13 ó -13.
$x=-5\pm 13$	Agrega -5 a cada miembro
$x=8$ ó -18	Efectúa las operaciones
∴ S={8,18}	Escribe el conjunto solución

EJEMPLO 4

Resuelve $(x-2)^2=49$

$(x-2)^2=49$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{49}$	Toma la raíz cuadrada positiva de cada miembro

$\lvert x-2\rvert = 7$	$\sqrt{(\text{numero})^2} = \lvert\text{numero}\rvert$ y $\sqrt{49} = 7$ (de aquí en adelante esto es igual a los problemas anteriores. Has transformado un problema nuevo a un problema viejo)
$x-2=\pm 7$	Definición de valor absoluto
$x=2\pm 7$	Agrega 2 a cada miembro
$x=9$ ó -5	Efectúa las operaciones
$S=\{9,-5\}$	Escribe el conjunto solución

NOTA: Recuerda que resolver significa escribir el conjunto solución.

EJEMPLO 5

Resuelve $(3x+2)^2=-25$

$(3x+2)^2=-25$	Escribe la ecuación dada
	Esta ecuación no tiene solución ya que el cuadrado de todo número real es no negativo.
$S=\varnothing$	

EJEMPLO 6

Resuelve $(0.2x+1.3)^2=14.2$

$(0.2x+1.3)^2=14.2$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(0.2x+1.3)^2} = \sqrt{14.2}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro
$\lvert 0.2x+1.3 \rvert = \sqrt{14.2}$	$\sqrt{n^2} = \lvert n \rvert$
$0.2x+1.3 = \pm\sqrt{14.2}$	Definición de valor absoluto
$0.2x = -1.3 \pm \sqrt{14.2}$	Agrega -1.3 a cada miembro
$x = \dfrac{-1.3 \pm \sqrt{14.2}}{0.2}$	Divide cada miembro por 0.2
$x \approx 12.34$ ó -25.34	Realiza la operación aritmética auxiliándote con la calculadora
$S=\{12.34,-25.34\}$	Escribe el conjunto solución

PRÁCTICA ORAL

Para los siguientes problemas proporciona el resultado después del primer paso en la solución de la ecuación.

Ejemplo	Respuesta
$\lvert x-7\rvert\ 13$	$x-7=\pm 13$
$(x+5)^2=81$	$\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}=9$

a) $\lvert x-9\rvert =15$	b) $\lvert x+1\rvert =9$
c) $\lvert 16x-9\rvert\ 7$	d) $\lvert 5x+2\rvert =6$
e) $\lvert 8-2x\rvert =$	f) $\lvert x+4\rvert =3$
g) $(x+9)^2=121$	h) $(x-4)^2=0$
i) $(x+12)^2=4$	j) $(0.5x+6.4)^2=3.5$
k) $(x+6)^2=23$	l) $(x-5.7)^2=12.3$
l) $(x-7)^2=34$	i) $\lvert x+7\rvert = \sqrt{34}$
m) $(x-2)^2=16$	n) $(x-7)^2=25$
o) $(x-3)^2=83$	p) $(x+8)^2=53.6$
q) $(2x-8)^2=53.6$	r) $(2x-8)^2=49$

EJERCICIO 6.1

Para los problemas del 1 al 24, encuentra el conjunto solución de la ecuación.

1) $\lvert x\rvert =21$	2) $\lvert x\rvert =53$
3) $\lvert x\rvert ==925$	4) $\lvert x\rvert =321$
5) $\lvert x-3\rvert =5$	6) $\lvert x+4\rvert\ 13$
7) $\lvert x+6\rvert =9$	8) $\lvert x-9\rvert =13$
9) $\lvert x-9\rvert =-12$	10) $\lvert x+7\rvert =-12$
11) $\lvert 6-x\rvert =26$	12) $\lvert 6-x\rvert =23$
13) $\lvert 3x-6\rvert =12$	14) $\lvert 6x-3\rvert =33$
15) $\lvert x-9\rvert =0$	16) $\lvert 9x+20\rvert =38$
17) $\lvert 7x-2\rvert =41$	18) $\lvert 3x-12\rvert =17$
19) $\lvert 18x-12\rvert =25$	20) $\lvert 12-7x\rvert =121$
21) $\lvert 11-3x\rvert =16$	22) $\lvert 9-6x\rvert =-12$
23) $\lvert 44-5x\rvert =-24$	24) $\lvert x-16\rvert =0$

Para los problemas del 25 al 66, resuelve la ecuación. Necesitas hacer una transformación preliminar antes de quitar los signos de valor absoluto.

25) $|x|$-6=14
26) $|x|$-9=26
27) 42-$|x|$=17
28) 69-$|x|$=24
29) $|3x+4|$-6=22
30) $|3x+9|$-3=36
31) 7-$|x-2|$=-11
32) 6-$|x-4|$=3
33) $(x-7)^2=4$
34) $(x-9)^2=9$
35) $(x+8)^2=64$
36) $(x+6)^2=121$
37) $(x+1)^2=56$
38) $(x+3)^2=82$
39) $(x-2)^2=41$
40) $(x-8)^2=47$
41) $(x-5)^2=79.4$
42) $(x-1)^2=64.6$
43) $(3x-4)^2=25$
44) $(2x+9)^2=32$
45) $(4x-8)^2=16$
46) $(7x+12)^2=10$
47) $(6x-9)^2=12$
48) $(3x+8)^2=10$
49) $(5x-9)^2=0$
50) $(6x+4)^2=0$
51) $(x+2.5)^2=12$
52) $(7-x)^2=15$
53) $(x+7.9)^2=13.6$
54) $(x+5.4)^2=8.6$
55) $(5x-2.6)^2=61.9$
56) $(6x-3.9)^2=43.5$
57) $(0.9x+6.5)^2=321.6$
58) $(0.8x+14.6)^2=39.2$
59) $(x-9)^2=81$
60) $(x+11)^2=-121$
61) $(x+4)^2=100$
62) $(x-7)^2=49$

63) Resuelve una ecuación como $|5x+2|=7$ transformándola en formas más simples.

64) Evalúa los siguientes radicales. Recuerda que $\sqrt{n^2}=|n|$.

a. $\sqrt{(-4)^2}$ b. $\sqrt{(-3)^2}$

b. c. $\sqrt{5^2}$ d. $\sqrt{9^2}$

e. $\sqrt{n^2}$ es positiva, no importa si n es positiva o negativa. Explica por qué $\sqrt{n^2}$ puede ser escrita como $|n|$

6.2 ECUACIONES CON TRINOMIOS CUADRÁTICOS PERFECTOS

Este capítulo está relacionado con la solución de ciertas ecuaciones cuadráticas. En algunos casos especiales como $x^2-12x+36=50$ el miembro izquierdo puede ser un trinomio cuadrado perfecto. Debes recordar cómo transformar $x^2-12x+36$ en un binomio al cuadrado.

¿Esto es $2x\sqrt{36}$? Si es, entonces 1/2(-12) = -6

$$x^2-12x+36=(x-6)^2=50$$

Entonces la ecuación de arriba puede ser escrita como $(x-6)^2=50$. De aquí en adelante este será un problema semejante a los ejemplos 4, 5 y 6 del punto anterior.

$\sqrt{(x-6)^2}=\sqrt{50}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro $\sqrt{n^2}=\|n\|$
$\|x-6\|=\sqrt{50}$	Definición de valor absoluto
$x-6=\pm\sqrt{50}$	Agrega 6 a cada miembro
$x=6\pm\sqrt{50}$	Realiza las operaciones
$x\approx 13.07$ ó -1.07	
$\therefore S=\{13.07,-1.07\}$	Escribe el conjunto solución

OBJETIVO

Ser capaz de resolver ecuaciones cuadráticas en las cuales el miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.

Compara las respuestas de acuerdo a los ejemplos de abajo.

EJEMPLO 1

Resuelve $x^2+4x+4=93$	Escribe la ecuación dada
$x^2+4x+4=93$	La mitad de 4 es 2, y 2^2 es 4. Por lo tanto, el miembro del lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.
$(x+2)^2=93$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro
$\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{93}$	$\sqrt{(\text{numero})^2}=\|\text{numero}\|$
$\|x+2\|=\sqrt{93}$	
$x+2=\pm\sqrt{93}$	Definición de valor absoluto
$x=-2\pm\sqrt{93}$	Agrega -2 a cada miembro
$\therefore S=\{7.64,-11.64\}$	Efectúa las operaciones y escribe el conjunto solución

NOTA Es mejor no usar calculadora hasta que llegues al paso *x=....*, luego escribe las respuestas en el conjunto solución como las encuentres en la calculadora. Puedes verificar las respuestas antes de borrar el resultado en la calculadora. Sólo almacena las respuestas, por ejemplo 11.64 ... en memoria y llámala cuando la necesites para la verificación.

Verificar:

$(-11.64...)^2+4(-11.64...)+4=93$	Sustituye x por -11.64...
93=93	Evalúa la expresión. (La calculadora puede mostrar un número ligeramente diferente de 93).