

**EJEMPLO 2**

Resuelve  $x^2 - 4.6x + 5.29 = 6.2$

$$x^2 - 4.6x + 5.29 = 6.2$$

$$(x - 2.3)^2 = 6.2$$

$$\sqrt{(x - 2.3)^2} = \sqrt{6.2}$$

$$|x - 2.3| = \sqrt{6.2}$$

$$x - 2.3 = +\sqrt{6.2}$$

$$x = 2.3 + \sqrt{6.2}$$

$$S = \{4.79, -3.9\}$$

Verificación de (4.79):

$$(4.79 \dots)^2 - 4.6(4.79 \dots) + 5.29 = 6.2$$

$$6.2 = 6.2$$

Escribe la ecuación dada

$\frac{1}{2}(-4.6)$  es  $-2.3$  y  $(-2.3)^2$  es  $5.29$

Por lo tanto, el miembro del lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto

Toma la raíz cuadrada de cada miembro

$$\sqrt{n^2} = |n|$$

Definición de valor absoluto

Agrega 2.3 a cada miembro

Realízala y escribe el conjunto solución

Sustituye 4.79... por  $x$

Verifica las respuestas. (Tu calculadora puede mostrar un valor ligeramente diferente)

**PRÁCTICA ORAL**

Proporciona el resultado después del primer paso de la solución de la ecuación.

Ejemplo

$$x^2 - 10x + 25 = 41$$

a)  $x^2 - 12x + 36 = 21$

c)  $x^2 - 4x + 4 = 12$

e)  $x^2 + 18x + 81 = 42$

g)  $x^2 + 9x + 20.25 = 19$

i)  $x^2 - 4.2x + 4.41 = 3.5$

Respuesta

$$(x - 5)^2 = 41$$

b)  $x^2 + 16x + 64 = 25$

d)  $x^2 + 10x + 25 = 17$

f)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

h)  $x^2 - 11 + 30.25 = 0$

j)  $x^2 + 8.6x + 18.49 = 5$

**EJERCICIO 6.2**

Para los problemas del 1 al 30, resuelve la ecuación escribiendo el miembro izquierdo como el cuadrado de un binomio. Si la solución es irracional aproxima a dos décimas.

1)  $x^2 + 124x + 49 = 1000$

3)  $x^2 + 2x + 1 = 4$

5)  $x^2 + 6x + 9 = 23$

7)  $x^2 - 22x + 121 = 90$

2)  $x^2 + 12x + 36 = 169$

4)  $x^2 + 10x + 25 = 16$

6)  $x^2 + 16x + 64 = 54$

8)  $x^2 + 24x + 144 = 29$

9)  $x^2 - 18x + 81 = 2526$

11)  $x^2 - 10x + 25 = 93.5$

13)  $x^2 - 14x + 49 = 5.6$

15)  $x^2 - 12x + 36 = -5$

17)  $x^2 - 24x + 144 = 144$

19)  $x^2 + 8x + 16 = 0$

21)  $x^2 + 1.6x + 0.64 = 25$

23)  $x^2 - 11x + 30.25 = 4$

25)  $x^2 + 8.84x + 19.6 = 65$

27)  $x^2 + 2.8x + 1.96 = 3.9$

29)  $x^2 + 0.6x + 0.09 = 0.21$

10)  $x^2 - 6x + 9 = 62.7$

12)  $x^2 - 22x + 121 = 2259$

14)  $x^2 - 16x + 64 = 39.6$

16)  $x^2 - 20x + 100 = 0$

18)  $x^2 + 18x + 81 = -36$

20)  $x^2 + 30x + 225 = 225$

22)  $x^2 - 2.8x + 1.96 = 36$

24)  $x^2 - 0.6x + 0.09 = 25$

26)  $x^2 - 2.4x + 1.44 = 15$

28)  $x^2 + 11x + 30.25 = 5.4$

30)  $x^2 - 1.6x + 0.64 = 0.92$

En los problemas del 31 al 40, resuelve la ecuación como lo hiciste en la sección anterior.

31)  $|x - 9| = 25$

32)  $|x - 12| = 82$

33)  $|x + 26| = 256$

34)  $|x + 0.06| = 0.09$

35)  $|4x + 2| = 12$

36)  $|9x - 5| = 62$

37)  $(x + 5)^2 = 121$

38)  $(x + 2)^2 = 16$

39)  $(x - 0.07)^2 = 0.09$

40)  $(x - 10)^2 = 500$

En los problemas del 41 al 48 utiliza el recurso de que la raíz cuadrada de un cociente es igual el cociente de las raíces cuadradas.

42)  $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = \frac{9}{25}$

42)  $x^2 + \frac{2}{7}x + \frac{1}{49} = \frac{16}{49}$

43)  $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$

44)  $x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{25}{81} = \frac{4}{81}$

45)  $x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{16}{36}$

46)  $x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = \frac{1}{36}$

47)  $x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{121}{64} = \frac{144}{64}$

48)  $x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{144}{100} = \frac{36}{100}$

49) En la ecuación  $x^2 + 12x + 17 = 32$ , el miembro izquierdo no es un trinomio cuadrado perfecto debido a que el término constante 17, no es cuadrado perfecto.

- ¿Cómo debe ser el término constante para que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto?
- Agrega un número a cada miembro de la ecuación para hacer el miembro izquierdo un trinomio cuadrado perfecto.
- Resuelve la ecuación.



### 6.3 COMPLETANDO AL CUADRADO

Ya conoces cómo elevar un binomio al cuadrado. Por ejemplo  $(x+3)^2$

$$= (x+3)(x+3)$$

$$= x^2 + 3x + 3x + 9$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

Definición de un cuadrado

Multiplica cada término de un binomio por cada término del otro.

Agrupar términos semejantes

Recuerda que la fórmula rápida de hacer esto, es la siguiente:

1. Eleva al cuadrado el primer término de  $(x+3)$
2. Agrega dos veces el producto de los dos términos en  $(x+3)$
3. Agrega el cuadrado del último término en  $(x+3)$   
 $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Para asegurarte que puedes hacer esto, trabaja el ejemplo siguiente, cubriendo la respuesta hasta que hayas terminado cada parte.

#### EJEMPLO 1

Efectúa el cuadrado

a)  $(x+6)^2$

$$(x+6)^2$$

$$= x^2 + 12x + 36$$

Escribe la expresión dada  
 $12x$  es  $2(x)(6)$  y  $36$  es  $6^2$

b)  $(x-8)^2$

$$(x-8)^2$$

$$= x^2 - 16x + 64$$

Escribe la expresión dada  
 $-16x$  es  $2(x)(-8)$  y  $64$  es  $(-8)^2$ . No olvides el signo negativo (-).

Si conoces este modelo, puedes invertir el proceso y encontrar el término constante necesario para obtener de un trinomio, un trinomio cuadrado perfecto. Por ejemplo, ¿qué número puedes agregar a  $x^2+8x$  para obtener un trinomio cuadrado perfecto? El proceso es como sigue:

- 1) Escribe  $x^2+8x$  y parte de un binomio cuadrado. Deja un espacio en blanco en el binomio  
 $x^2+8x$   
 $(x \quad )^2$

Llena el número en el binomio

$$x^2+8x$$

$$(x+4)^2$$

$$4 \text{ es } \frac{1}{2} (8)$$

Llena el número en el trinomio

$$x^2+8x+16$$

$$(x+4)^2 \text{ porque } 16 \text{ es } 4^2$$

El proceso de agregar 16 a  $x^2+8x$  es llamado completando al cuadrado. Una vez visto el modelo es fácil hacerlo mentalmente. La técnica es dada a continuación.

Técnica

Completando al cuadrado

El coeficiente de  $x^2$  es igual a 1 (como es en  $x^2+8x$ ), entonces para completar al cuadrado, realizar lo siguiente:

Toma la mitad del coeficiente de  $x$

( $\frac{1}{2}$  de 8, o sea 4, en este caso)

Elévalo al cuadrado

( $4^2$  es igual a 16, en este caso)

Agrega el resultado

$$(x^2+8x+16, )$$

#### OBJETIVO

Ser capaz de agregar una constante a un binomial cuadrático, como  $x^2+8x$ , para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

#### EJEMPLO 2

Completa al cuadrado

$$x^2+10x$$

$$x^2+10x+25$$

$\frac{1}{2}$  de 10 es 5, y  $5^2$  es 25 (no escribas un signo de igualdad (=), puesto que la expresión dada no iguala la respuesta). Luego sumamos 25.

$$x^2-12x$$

$$x^2-12x+36$$

$\frac{1}{2}$  de (-12) es -6, y  $(-6)^2$  es 36. Luego sumamos 36



- c)  $x^2-9x$
- d)  $x^2-9x+20.25$   $\frac{1}{2}$  de 9 es 4.5, y  $4.5^2$  es 20.25. Luego sumamos 20.25
- d)  $x^2-3.5x$   $\frac{1}{2}$  de -3.5 es -1.75, y  $(-1.75)^2$  es 3.0625. Luego sumamos 3.0625
- $x^2-3.5x+3.0625$

**EJERCICIO 6.3**

Para los problemas del 1 al 10, eleva al cuadrado el binomio en solo un paso.

- |              |               |
|--------------|---------------|
| 1) $(x+3)^2$ | 2) $(x+2)^2$  |
| 3) $(x-6)^2$ | 4) $(x-2)^2$  |
| 5) $(x+8)^2$ | 6) $(x+7)^2$  |
| 7) $(x-4)^2$ | 8) $(x+1)^2$  |
| 9) $(x-1)^2$ | 10) $(x-3)^2$ |

Para los problemas del 11 al 30, copia la expresión y agrega una constante para completar un trinomio cuadrado perfecto.

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 11) $x^2+12x...$  | 12) $x^2+18x...$  |
| 13) $x^2-8x...$   | 14) $x^2-22x...$  |
| 15) $x^2+14x...$  | 16) $x^2+7x...$   |
| 17) $x^2+26x...$  | 18) $x^2-100x...$ |
| 19) $x^2-15x...$  | 20) $x^2-9x...$   |
| 21) $x^2-20x...$  | 22) $x^2+x...$    |
| 23) $x^2-17x...$  | 24) $x^2-11x...$  |
| 25) $x^2+2.4x...$ | 26) $x^2-4.2x...$ |
| 27) $x^2+3.1x...$ | 28) $x^2+5.3x...$ |
| 29) $x^2+0.5x...$ | 30) $x^2+0.9x...$ |

- 31) La ecuación  $x^2+14x+21=33$  tal como está no puede ser resuelta por el método de la sección anterior ya que el miembro izquierdo no es un trinomio cuadrado perfecto. Ahora que ya sabes cómo completar al cuadrado, serás capaz de imaginarte una forma para resolver esta ecuación. Puedes hacerlo en la forma siguiente:

Primero sustrae 21 de cada miembro, luego determina qué número se debe agregar a  $x^2+14x$  para completar el cuadrado. Agrega este número a cada miembro de la ecuación y luego efectúa esto en la forma que aprendiste en la sección anterior.

**6.4 RESOLVIENDO ECUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE COMPLETANDO AL CUADRADO**

Una vez entendido el proceso de completando al cuadrado, puedes usar la técnica para resolver ecuaciones cuadráticas tales como  $x^2-10x+7=0$

Si el miembro izquierdo fuera un trinomio cuadrado perfecto, podrías resolver la ecuación como en la sección anterior. Por lo tanto, haz esto un trinomio cuadrado por el método de completar al cuadrado.

**OBJETIVO**

Ser capaz de resolver ecuaciones cuadráticas tales como  $x^2-12x+9=0$ , completando al cuadrado y agregando el mismo número al otro miembro.

Cubre las respuestas a medida que desarrolles estos ejemplos.

**EJEMPLO 1**

Resuelve  $x^2-12x+9=0$

Completando al cuadrado

$$x^2-12x+9=0$$

Escribe la ecuación dada

$$x^2-12x = -9$$

Agrega -9 a cada miembro, dejando un espacio en el cual se completa al cuadrado

$$x^2-12x+36 = -9+36$$

Agrega 36 a cada miembro de la ecuación para completar al cuadrado en el miembro izquierdo.

$$(x-6)^2 = 27$$

Escribe el miembro izquierdo como un cuadrado; -6 es la mitad de -12. Haz la aritmética en la derecha

A partir de aquí, el problema es como los de secciones anteriores.

$$\sqrt{(x-6)^2} = \sqrt{27}$$

Toma la raíz cuadrada de cada miembro.

$$|x-6| = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{(\text{numero})^2} = |\text{numero}|$$

Definición de valor absoluto

$$x-6 = \pm \sqrt{27}$$

Agrega 6 a cada miembro y emplea la calculadora para obtener que  $\sqrt{27} = 5.2$

$$x = 6 \pm \sqrt{27}$$

Efectúe operaciones y escribe el conjunto solución.

$$S = \{11.20, 0.8\}$$

El checar la respuesta puede dar una pequeña sorpresa

$$(11.20\dots)^2 - 12(11.20\dots) + 9 = 0$$

$$0 = 0$$



El número del miembro izquierdo probablemente sea cercano, pero no igual a cero. Lo cual podrá comprobar empleando la calculadora.

El método anterior para completar al cuadrado no funciona si el coeficiente de  $x^2$  no es igual a 1. Para resolver una ecuación como  $3x^2+5x+3=0$  simplemente divide cada miembro por 2, obteniendo:

$$\frac{2x^2 + 5x + 3}{2} = \frac{0}{2}$$

En el lado izquierdo, la división se distribuye sobre la adición. En el lado derecho  $0/3$  es 0. Así la ecuación llega a ser:  $x^2+2.5x+1.5=0$

Desde aquí resolverás las ecuaciones como en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 2**

Resuelve  $2x^2+10x-9=0$ , completando al cuadrado.

$$2x^2+10x-9=0$$

$$x^2+5x-4.5=0$$

$$x^2+5x=4.5$$

$$x^2+5x+6.25=4.5+6.25$$

$$(x+2.5)^2=10.75$$

$$x+2.5 = \pm\sqrt{10.25}$$

$$x = -2.5 \pm \sqrt{10.75}$$

$$S\{0.78, -5.78\}$$

Verificación de (-5.78):

$$2(-5.78)^2+10(-5.78)-9=0$$

$$0=0$$

Escribe la ecuación dada

Divide cada miembro por 2

Agrega 4.5 a cada miembro

Completa al cuadrado

Escribe el miembro izquierdo como un cuadrado

Suma en el lado derecho

Toma la raíz cuadrada de cada miembro.

Agrega -2.5 a cada miembro y emplea la calculadora

para obtener que  $\sqrt{10.75} \approx 3.28$

Escribe el conjunto solución

Sustituye  $x=5.78$

**PRÁCTICA ORAL**

Para los problemas siguientes, proporciona el número que debe ser sumado para completar un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo

i.  $x^2-14x...$

ii.  $x^2+5x...$

Respuesta

i. 49

ii. 6.25

a)  $x^2+18x...$

b)  $x^2+6x...$

c)  $x^2-3x...$

d)  $x^2-13x...$

e)  $x^2+3.7...$

f)  $x^2-0.4...$

g)  $x^2-22x...$

h)  $x^2-18x...$

i)  $x^2+5x...$

j)  $x^2-11x...$

k)  $x^2-x...$

l)  $x^2-6.2x...$

**EJERCICIO 6.4**

Para los problemas del 1 al 10, resuelve la ecuación completando al cuadrado. Escribe cualquier respuesta irracional, redondeando a dos decimales.

1)  $x^2+6x+7=0$

3)  $x^2+4x+6=0$

5)  $x^2-18x+10=0$

7)  $x^2-12x+7=0$

9)  $x^2-2x-3=0$

2)  $x^2-6x+1=0$

4)  $x^2+10x+23=0$

6)  $x^2-8x-25=0$

8)  $x^2-22x-14=0$

10)  $x^2+24x+10=0$

Problemas del 11 hasta el 20 tienen decimales en la ecuación ¡u otras sorpresas!

11)  $x^2+24x-1.6=0$

13)  $x^2-2x-22.4=0$

15)  $x^2+6x+17x=0$

17)  $x^2-10x+25=0$

19)  $x^2+20x=0$

12)  $x^2+8x-6.5=0$

14)  $x^2-10x-17.5=0$

16)  $x^2-22x+80=0$

18)  $x^2-4x+25=0$

20)  $x^2-10x=0$

En los problemas del 21 al 30, el coeficiente de  $x$  no es un número par entero.

21)  $x^2+3x+1=0$

23)  $x^2-9x-6=0$

25)  $x^2-5x-18=0$

27)  $x^2-13x+40=0$

29)  $x^2+2.4x-5=0$

22)  $x^2+5x+3=0$

24)  $x^2-3x-5=0$

26)  $x^2-7x-18=0$

28)  $x^2-x+1=0$

30)  $x^2+6.4x-7=0$

Los problemas del 31 al 50 requieren otras transformaciones antes de completar al cuadrado.

31)  $x^2-x-2=0$

33)  $x^2=-9x+8$

35)  $2x^2-x-3=0$

37)  $9x^2+10=12x$

39)  $x^2+0.7=2.4x$

32)  $3x^2+10x+7=-2$

34)  $x^2=-8x-16$

36)  $x^2+1.32=-1.4x$

38)  $6.2x=32-x^2$

40)  $x^2-5x=-x-8$

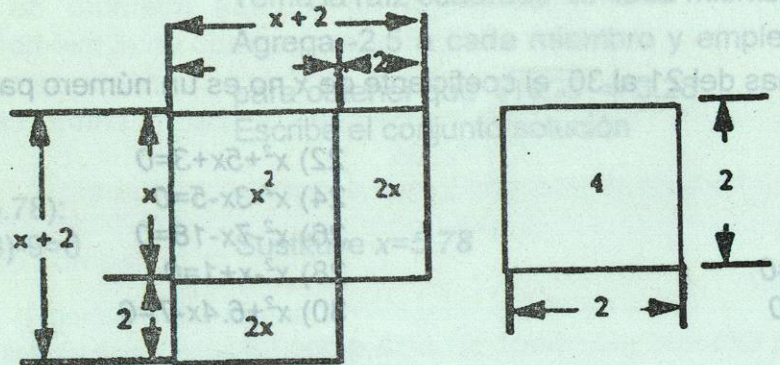


- 41)  $4.6x=4-x^2$
- 43)  $4x^2-9x+3=0$
- 45)  $2x^2-2x+5=0$
- 47)  $-6x^2+18x+29=0$
- 49)  $0.6x^2+2.3x-20=0$
- 42)  $2x^2+5x+3=0$
- 44)  $42x^2-x-1=0$
- 46)  $0.4x^2+1.5x-1.3=0$
- 48)  $-3x^2-10x+4=0$
- 50)  $6x^2-5x+1=0$

Para los problemas del 51 al 60, resuelve la ecuación. Estos son similares a las ecuaciones que resolviste antes de esta sección. ¡Piensa cuidadosamente acerca de lo que estás haciendo!

- 51)  $|x-6|=36$
- 53)  $|2x-17|=16$
- 55)  $(x-5)^2=100$
- 57)  $(x+6.9)^2$
- 59)  $(x-1)^2=36$
- 52)  $|x+11|=9$
- 54)  $|5x-3|=25$
- 56)  $(x+6)^2=4$
- 58)  $(x-1.2)^2=16$
- 60)  $(x+10)^2=1$

61) La frase completando al cuadrado puede ser ilustrada con el concepto de área. Por ejemplo el diagrama muestra un cuadrado con lado  $x$ , flanqueado por dos rectángulos de dimensión 2 por  $x$ . El área es  $x^2+2x+2x$ , o  $x^2+4x$ . Como puedes ver, agregando un cuadrado de 2 por 2 (área igual a 4) "completa" el cuadrado grande.



**PRÁCTICA ORAL**

Para los problemas siguientes, proporciona el número que debe ser sustraído para completar un trinomio cuadrado perfecto.

- Dibuja las figuras que completen el cuadrado para las siguientes expresiones:
- a.  $x^2+12x$
  - b.  $x^2+20x$
  - c.  $x^2-14x$

Es posible completar al cuadrado agregando un término intermedio. Por ejemplo, si  $x^2+4$  fuera a ser convertido en un trinomio cuadrado, el término intermedio tendría que ser  $4x$ . ¿Cuál tendría que ser el término intermedio para hacer estas expresiones trinomios cuadrados?

- a.  $x^2+16$
- b.  $x^2+100$
- c.  $x^2+81$
- d.  $x^2+49$
- e.  $x^2+53$

**5.5 LA FÓRMULA CUADRÁTICA**

Toda ecuación cuadrática en una variable es de la forma :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y  $a \neq 0$ .

Usamos el método de completamiento cuadrático para obtener una fórmula que nos servirá para obtener las soluciones de cualquier ecuación de la forma 1)

Comenzaremos dividiendo ambos miembros por a. Obtenemos :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumamos  $-\frac{c}{a}$  en ambos lados de la igualdad :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos un trinomio ( cuadrado de un binomio ) para lo cual nos falta el término

$$\frac{b^2}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$