

Hallamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sumando  $-\frac{b}{2a}$  para despejar  $x$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  que es la fórmula buscada.

Veamos como podemos aplicarla para resolver ;

### Ejemplo 1.

$$2x^2 - 9x - 5 = 0$$

Aquí  $a = 2$      $b = -9$     y     $c = -5$

$$b^2 - 4ac = 81 - 4(2)(-5) = 121; \quad \sqrt{121} = 11$$

Luego

$$x = \frac{-(-9) \pm 11}{4} = \frac{9 \pm 11}{4}$$

Tomando el "+" (mas) del doble signo

$$x = \frac{20}{4} = 5$$

Tomando el "-" (menos)

$$x = \frac{9 - 11}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones son pues:

$$x = 5 \quad \text{y} \quad x = -\frac{1}{2}$$

### Ejemplo 2.

$$x^2 + 20x + 25 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 20 \quad c = 25$$

$$b^2 - 4ac = 400 - 4(1)(25) = 0 \quad ; \quad \sqrt{0} = 0$$

$$x = \frac{-20 \pm 0}{2} = -\frac{20}{2} = -10$$

En este caso obtenemos una sola solución;  $x = -10$

Si admitimos que toda ecuación de 2° grado admite o sea, posee dos soluciones en este

caso diremos que las dos son iguales a  $x = -\frac{20}{2} = -10$

### OBJETIVO

Ser capaz de resolver una ecuación cuadrática dada usando la fórmula cuadrática.

Cubre las respuestas conforme vayas resolviendo los siguientes ejemplos.

### Ejemplo 3.

Resuelve usando la fórmula cuadrática:  $2x^2 + 8x + 5 = 0$

$$2x^2 + 8x + 5 = 0$$

Escribe la ecuación dada

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$

Usa la fórmula cuadrática:  $a=2, b=8, c=5$

$$x = \{-0.78, -3.22\}$$

El radical es  $\sqrt{24}$ , el cual es aproximadamente 4,898979486



**Ejemplo 4.**Resuelve usando la fórmula cuadrática:  $5x^2-7x-11=0$ 

$$5x^2-7x-11=0$$

Escribe la ecuación dada

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(5)(-11)}}{2(5)}$$

Usa la fórmula cuadrática:  $a=5, b=-7, c=-11$ 

$$S\{2.34, -0.94\}$$

Escribe el conjunto solución. El radical es  $\sqrt{269}$ , el cual es aproximadamente 16.40121947**Ejemplo 5**Resuelve usando la fórmula cuadrática:  $2x^2+5x+2=0$ 

$$2x^2+5x+2=0$$

Escribe la ecuación dada

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(2)}}{2(2)}$$

Usa la fórmula cuadrática:  $a=2, b=5, c=2$ 

$$S\{-0.5, -2\}$$

El radical es  $\sqrt{9} = 3$ . Entonces las soluciones son números racionales. (Esto pasa siempre que  $b^2-4ac$  es un cuadrado perfecto)**Ejemplo 6.**Resuelve usando la fórmula cuadrática:  $3x^2-x+8=0$ 

$$3x^2-x+8=0$$

Escribe la ecuación dada

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(8)}}{2(3)}$$

Usa la fórmula cuadrática:  $a=3, b=-1, c=8$ 

$$S = \emptyset$$

El radical es  $\sqrt{-95}$  el cual no es un número real ( esto pasa siempre que  $b^2-4ac$  es negativo )**Ejemplo 7**Resuelve usando la fórmula cuadrática:  $(2x+3)(x-7)=3$ 

$$(2x+3)(x-7)=3$$

Escribe la ecuación dada

$$2x^2-11x-21=3$$

Multiplica los binomios

$$2x^2-11x-24=0$$

Has el miembro izquierdo igual a cero puesto que la fórmula cuadrática empieza: Si  $ax^2+bx+c=0$ 

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4(2)(-24)}}{2(2)}$$

Usa la fórmula cuadrática:  $a=2, b=-11, c=-24$ 

$$S\{7.17, -1.67\}$$

El radical es  $\sqrt{313}$  el cual es aproximadamente 17.69180601**PRÁCTICA ORAL**Proporciona los valores de  $a, b$  y  $c$  para utilizarlos en la fórmula cuadrática.**Ejemplo**

$$8x^2-9x+1=0$$

Respuesta

$$a=8, b=-9, c=1$$

a)  $5x^2-3x+2=0$

g)  $x^2-2x=0$

b)  $6x^2+4x+10=0$

h)  $-3x^2-2x-6=0$

c)  $x^2-x+3=0$

i)  $x^2+x+1=0$

d)  $9x^2-11x-15=0$

j)  $6x^2-9=0$

e)  $6x^2+3x+2=0$

k)  $-x^2-x+1=0$

f)  $5x^2-3x+2=0$

l)  $5-3x+7x^2=0$

**EJERCICIO 6.5**

Para los problemas del 1 al 20, resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática.

Escribe las soluciones irracionales, redondeándolas a dos decimales. Verifica cada respuesta almacenándola en la memoria de la calculadora. Después evalúa la(s) expresión(es) en la ecuación usando el valor almacenado.

1)  $2x^2-x-3=0$

2)  $7x^2+10x+3=0$

3)  $4x^2-11x-3=0$

4)  $x^2+8x+25=0$

5)  $x^2-x-30=0$

6)  $5x^2-17x+6=0$

7)  $2x^2-4x+1=0$

8)  $x^2-6x+13=0$

9)  $6x^2+5x+1=0$

10)  $x^2-x-20=0$

11)  $9x^2+3x-2=0$

12)  $8x^2+10x+1=0$

13)  $3x^2-x-2=0$

14)  $-x^2-x+1=0$

15)  $x^2+7x+12=0$

16)  $0.2x^2-0.4x-2.1=0$

17)  $0.5x^2+11x+3.5=0$

18)  $x^2-5x+3=0$

19)  $0.8x^2+5x+3.1=0$

20)  $-x^2+x+1=0$

Para los problemas del 21 al 30, resuelve la ecuación como lo hiciste arriba. Observa que falta un término.

**Ejemplos**i)  $3x^2+7=0$  puede ser escrita como  $3x^2+0x+7=0$ ; entonces  $a=3, b=0, c=7$ ii)  $-8x^2-5x=0$  puede ser escrita como  $8x^2-5x+0=0$ ; entonces  $a=8, b=-5, c=0$ 

21)  $3x^2+7=0$

22)  $4x^2-16=0$

23)  $4x^2+9=0$

24)  $2x^2+4=0$

25)  $x^2-2x=0$

26)  $3x^2+2x=0$

27)  $2x^2+x=0$

28)  $x^2+x=0$

29)  $5x+1=0$

30)  $3x-13=0$



Para los problemas del 31 al 50 resuelve la ecuación como hiciste arriba. Deberás transformarlas a:  $ax^2+bx+c=0$ , para que puedas usar la fórmula cuadrática.

31)  $5x^2+2x=-3$

33)  $2x^2-5x-3=2x-4x^2$

35)  $x(x-2)=5$

37)  $x(x+1)=30$

39)  $x^2=-2x+2$

41)  $(x+3)(x-2)=2$

43)  $(2x+2)(3x+1)=24$

45)  $(x+2)^2+36=0$

47)  $0.2(x-4)=x^2-1.2$

49)  $(x+8)^2+x=(x+6)^2+4$

32)  $3x^2-5x=-2$

34)  $x^2+3x-1=x-2x^2$

36)  $x(x-6)=2$

38)  $n(n+2)=35$

40)  $(x+3)^2-x=20$

42)  $(x+2)(x-5)=6$

44)  $(3x+2)(2x-1)=13$

46)  $(x+3)^2+36=0$

48)  $0.3(3-x)=x^2+0.6$

50)  $(x-3)^2+3x=(x+1)^2-10$

Has notado que algunas veces no hay soluciones reales a ciertas ecuaciones cuadráticas. Esto sucede cuando el número bajo el signo radical es negativo. De la fórmula cuadrática, sabes que este número es  $b^2-4ac$ . Sin que hayas resuelto las siguientes ecuaciones, encuentra el valor de  $b^2-4ac$  y usa el resultado para decir si la ecuación tiene o no soluciones reales.

a)  $3x^2+2x+5=0$

b)  $x^2+7x-3=0$

c)  $5x^2+x-20=0$

d)  $2x^2-3x+7=0$

## 6.6 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR FACTORIZACIÓN

En el capítulo 2 aprendiste a usar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de este tipo:

$$x^2-x-2=0$$

También aprendiste cómo factorizar trinomios de segundo grado como:

$$x^2-x-2$$

Es tiempo de poner estas dos ideas juntas y desarrollar un método para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.

Empezaremos con:

$$x^2-x-2=0$$

Puedes factorizar el miembro de la izquierda, quedando:

$$(x-2)(x+1)=0$$

En esta forma, la ecuación nos dice que un **producto** de dos números es igual a CERO. Pero la única manera de que un producto pueda ser cero es que uno de los factores sea cero. Entonces la ecuación puede ser transformada a:

$$x-2=0 \quad \text{ó} \quad x+1=0$$

Esta transformación cambia un problema difícil en dos problemas fáciles. Añadiendo 2 en la primera expresión y restando 1 en la segunda, nos dá:

$$x=2 \quad \text{ó} \quad x=-1$$

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S=\{2, -1\}$$

### PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DEL CERO

(Cero por cualquier número es cero)

Si un factor de un producto es 0, entonces el producto es igual a 0.

Esto es, para todo número real  $n$

$$n(0)=0 \quad \text{ó} \quad (0)n=0$$

El hecho de que el producto pueda ser cero **únicamente** si uno de sus factores es cero, es el recíproco de la **propiedad multiplicativa del cero**.

### RECÍPROCO DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DEL CERO.

Si un producto de números reales es igual a cero, entonces uno de los factores es igual a cero. Esto es, para todo número real  $n$  y  $p$ , si  $np=0$ , entonces  $n=0$  ó  $p=0$

Desafortunadamente, esto no funciona si el trinomio no puede ser factorizado. Recuerda que para la ecuación  $ax^2+bx+c=0$ , la fórmula cuadrática dice que:

También recuerda que  $b^2-4ac$  recibe el nombre de **discriminante**. Para  $x^2-x-2$ , el discriminante es  $(-1)^2-(4)(1)(-2)=9$

Debido a la casualidad que el número 9 es un **cuadrado perfecto**,  $3^2$ . Así que puedes instalar Equation Editor and double-click here to view equation.

y la solución para  $x$  no involucra ningún radical. Este es también el caso cuando un trinomio  $ax^2+bx+c$  puede ser factorizado.



**Conclusión**

**PRUEBA DEL DISCRIMINANTE PARA FACTORIZAR**

Un trinomio cuadrático  $ax^2+bx+c$  puede ser factorizado si y sólo si el discriminante  $b^2-4ac$  es un cuadrado perfecto.

**OBJETIVO**

Dada una ecuación cuadrática, resolver por factorización, si resulta práctico, de otra manera resolver esto por la fórmula cuadrática.

**EJEMPLO 1**

Resolver  $(7x-3)(2x+5)=0$

$(7x-3)(2x+5)=0$

$7x=3$  ó  $2x=-5$

$x = \frac{3}{7}$  ó  $x = -\frac{5}{2}$

Por lo tanto:

$S = \left\{ \frac{3}{7}, -\frac{5}{2} \right\}$

Escribir la ecuación dada  
Un producto es cero, solo si un factor es cero.  
Agregar 3 y agregar -5

Dividir por 7 y dividir por 2

**EJEMPLO 2**

Resolver  $2x^2-x-3=0$

$2x^2-x-3=0$

$(2x-3)(x+1)=0$

$2x-3=0$  ó  $x+1=0$

$2x=3$  ó  $x=-1$

$x = \frac{3}{2}$  ó  $x = -1$

Por lo tanto:

$S = \left\{ \frac{3}{2}, -1 \right\}$

Escribir la ecuación dada  
Factorizar (si puedes, por inspección)  
Un producto es cero sólo si un factor es cero  
Agregar 3 y agregar -1

Dividir por 2

Escribir el conjunto solución

**EJEMPLO 3**

Resolver  $2x^2+15x+12=0$

$2x^2+15x+12=0$

$b^2-4ac=15^2-4(2)(12)$

$=129$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2(2)}$

$x = -0.91$  ó  $-6.59$

Por lo tanto:

$S = \{-0.91, -6.59\}$

Escribir la ecuación dada  
Calcular el discriminante  
129 no es cuadrado perfecto, así que no puede haber factorización

Usar la fórmula cuadrática

Calcular

Escribe la solución

**EJEMPLO 4**

Resolver  $10x^2-83x+24=0$

$10x^2-83x+24=0$

$x = \frac{83 \pm \sqrt{6889 - 4(10)(24)}}{2(10)}$

$x = \frac{83 \pm \sqrt{5929}}{20}$

$x = \frac{83 \pm 77}{20}$

$x = 8$  ó  $x = \frac{3}{10}$

Por lo tanto:

$S = \left\{ 8, \frac{3}{10} \right\}$

Escribe la ecuación dada

Se resuelve por fórmula cuadrática puesto que sería impráctico factorizar con coeficientes tan grandes

Hacer los cálculos

Obtener la raíz cuadrada. (El trinomio podría haberse factorizado ya que 5929 es cuadrado perfecto)

Terminar cálculos

Escribiendo el conjunto solución.



## PRÁCTICA ORAL

¿Pueden las siguientes ecuaciones ser resueltas factorizando? Explica.

Ejemplos

i)  $3x^2 - 10x - 8 = 0$

ii)  $5x^2 - 11x + 3 = 0$

Respuestas

i) Sí;  $b^2 - 4ac = 196$  es cuadrado perfectoii) No;  $b^2 - 4ac = 61$  no es cuadrado perfecto

a)  $x^2 + 8x + 15 = 0$

c)  $x^2 + 5x + 3 = 0$

e)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

g)  $2x^2 + 7x + 6 = 0$

i)  $3x^2 + 10x - 8 = 0$

k)  $x^2 + 6x + 10 = 0$

b)  $x^2 - x - 6 = 0$

d)  $x^2 + 3x + 10 = 0$

f)  $x^2 + 3x + 10 = 0$

h)  $3x^2 - 8x + 5 = 0$

j)  $2x^2 + 5x - 10 = 0$

l)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$

## EJERCICIO 6.6

- Enuncia la propiedad de multiplicación del cero (ver texto).
- Enuncia la conversión de la propiedad de multiplicación por cero (ver texto)

Para problemas del 3 al 15, resuelve la ecuación

3)  $(x-3)(x-7)=0$

5)  $(3x-5)(x+4)=0$

7)  $(7x+8)(2x-11)=0$

9)  $(x-3)(x+4)(x-5)=0$

11)  $(6x-5)(x+7)(2x-9)=0$

13)  $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)=0$

15)  $(x+6)(x-7)(x-8)(x+9)=0$

4)  $(x-9)(x-2)=0$

6)  $(4x-7)(x+3)=0$

8)  $(11x+17)(2x-13)=0$

10)  $(5x+24)(4x+37)=0$

12)  $(x-6)(x-5)(x+1)=0$

14)  $(2x-9)(x+8)(6x-7)=0$

Para los problemas del 16 al 39 resolver por factorización si es práctico. De otro modo resuelve usando la fórmula cuadrática. Redondea las soluciones irracionales a dos cifras decimales.

16)  $x^2 + 7x + 10 = 0$

18)  $x^2 - x - 12 = 0$

20)  $x^2 + 4x - 5 = 0$

22)  $x^2 - 5x + 6 = 0$

24)  $x^2 + 6x + 5 = 0$

26)  $2x^2 + 5x + 3 = 0$

28)  $3x^2 + 2x - 8 = 0$

30)  $5x^2 - 7x - 6 = 0$

32)  $6x^2 - 11x + 5 = 0$

34)  $5x^2 - 13x - 6 = 0$

17)  $x^2 + 10x + 21 = 0$

19)  $x^2 - 3x - 10 = 0$

21)  $x^2 + 5x - 6 = 0$

23)  $x^2 - 6x + 8 = 0$

25)  $x^2 + 9x + 7 = 0$

27)  $2x^2 + 11x + 5 = 0$

29)  $3x^2 + 7x - 20 = 0$

31)  $5x^2 - 8x - 4 = 0$

33)  $5x^2 - 24x + 16 = 0$

35)  $2x^2 - 15x - 5 = 0$

36)  $6x^2 - 5x - 6 = 0$

38)  $16x^2 - 46x + 15 = 0$

37)  $6x^2 - 7x - 20 = 0$

39)  $12x^2 - 20x + 7 = 0$

Para los problemas del 40 al 45 el miembro izquierdo se puede factorizar como producto de tres binomios lineales. Resuelve las ecuaciones, cada una tiene tres soluciones.

40)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

42)  $x^3 + 4x^2 - 25x - 100 = 0$

44)  $3x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 0$

41)  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

43)  $x^3 + 5x^2 - 36x - 180 = 0$

45)  $4x^3 - 24x^2 - x - 6 = 0$

Para los problemas del 46 al 49 cada ecuación tiene 3 soluciones. Sin embargo necesitarás habilidad para hallar las tres soluciones. Trata primero factorizando.

46)  $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = 0$

48)  $6x^3 - 3x^2 - 8x + 4 = 0$

47)  $x^3 + 2x^2 - 7x - 14 = 0$

49)  $5x^3 - 20x^2 - 3x + 12 = 0$

## 6.7 PROBLEMAS CON MOVIMIENTO VERTICAL

Como recordarás, en un movimiento uniforme, la distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo

$$d = v \cdot t$$

Insistimos en que esta fórmula trabaja sólo si la velocidad permanece constante. Cuando un objeto es lanzado en forma vertical hacia arriba, la velocidad varía. La velocidad va disminuyendo según el objeto va subiendo, hasta llegar a su punto más alto; luego de iniciar su movimiento de regreso, su velocidad se vuelve negativa. En Física aprenderás que la distancia no es igual a la velocidad por el tiempo, en su lugar la distancia es dada por:  $d = v \cdot t - 5t^2$

