El proceso para racionalizar el denominador cuando este en forma radical en una fracción, se denomina ***racionalización del denominador.***

En los siguientes ejemplos es fundamental considerar los pasos que se siguen durante el proceso de solución.

EJEMPLOS

1. Escribe la siguiente expresión en forma simplificada $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

Solución

Escribe la expresión dada $:\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ $=\frac{\sqrt{13}}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $=\frac{\sqrt{91}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}$

Simplifica el denominador $=\frac{\sqrt{91}}{7}$

Comprueba con la ayuda de la calculadora que $\frac{\sqrt{13}}{7}\approx\frac{\sqrt{91}}{7}$

2. Simplifica $\frac{6}{2\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión dada $:\frac{6}{2\sqrt{5}}$

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $=\frac{6}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $=\frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{25}}$

Obtén la raíz cuadrada de 25 y simplifica. $\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Es prudente señalar que una fracción está simplificada cuando el radical del denominador de la fracción ya no se conserva. Recuerda que este hecho es conocido como "racionalización del denominador"

3. Escribe en forma simplificada la expresión: $\sqrt{\frac{72}{11}}$

Solución

Escribe la expresión dada $:\sqrt{\frac{72}{11}}$

Aplica la propiedad 2 $=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{11}}$

Factoriza 72 $=\frac{\sqrt{36\cdot 2}}{\sqrt{11}}$

Simplifica el numerador aplicando propiedad 1 $=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

A partir de aquí se repite el procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores.

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$: $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar en el numerador y ten en cuenta que $\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}=\left(\sqrt{11}\right)^2$ $\frac{6\sqrt{22}}{\left(\sqrt{11}\right)^2}$

Como $=\left(\sqrt{11}\right)^2=11$ $\frac{6\sqrt{22}}{11}$

El mecanismo de solución para la división de radicales de expresiones de la misma forma que las anteriores, no tiene mayor dificultad. Expresiones indicadas tales como:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}}\div\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$$

siguen el mecanismo de solución siguiente.

Solución

Escribir la expresión dada : $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}}\div\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$

Cambiar la operación a la equivalente de multiplicar $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}}\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $\frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

Cancela $\sqrt{2}$ $\frac{4\sqrt{2}\ \ \sqrt{2}}{15\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{15\sqrt{3}}$

Cancela $\sqrt{3}$ $\frac{4\sqrt{2}}{15}$

EJERCICIO 7.3

Simplifica cada uno de los siguientes problemas, racionalizando el denominador de la expresión.

1) $\frac{2}{\sqrt{30}}$ 2) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$

3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$

5) $\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ 6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

7) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ 8) $\frac{45\sqrt{2}}{5\sqrt{15}}$

9) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}$ 10) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{25}}{4\sqrt{2}}$

En cada uno de los siguientes problemas transformar a una expresión simple indicando los pasos operativos a seguir.

11) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ 16) $\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{9}{\sqrt{19}}$

12) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$ 17) $\sqrt{22}-\frac{5}{\sqrt{6}}$

13) $\sqrt{\frac{75}{3}}\ \sqrt{\frac{2}{5}}$ 18) $3+\frac{1}{\sqrt{2}}$

14) $\sqrt{\frac{8}{9}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$ 19) $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}}$

15) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}}+\frac{\sqrt{6}}{2}$ 20) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}+4\sqrt{3}$

Racionaliza el denominador en cada uno de los siguientes problemas:

21) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{6}}$ 22) $\frac{14}{\sqrt{28}}$

23) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 24) $\frac{\sqrt{31}}{\sqrt{71}}$

25) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$

7.4 BINOMIOS CON RADICALES

La expresión $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ representa el producto de dos binomios con radicales. Si $x\geq 0$ $y\geq 0$

Tenemos que:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2 = x - y$$

PROPIEDAD 3
BINOMIOS CONJUGADOS CON RADICALES
Para dos números racionales no negativos x y y.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = x - y$$

Anteriormente se trató acerca del producto de la suma de dos cantidades por su diferencia expresado como:
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

En ésta sección se presentaran diversos problemas en los cuales los términos de los binomios formados, no todos, necesariamente estarán expresados en forma radical.

En el caso particular en el cual la suma y diferencia de binomios contenga todos sus términos con radical se utilizará la propiedad 3 como mecanismo de solución. En el caso en el cual la suma y diferencia de binomios no contenga todos sus términos con radical, convendrá utilizar la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*.

Ver los siguientes factores de binomios.

PRODUCTO DE BINOMIOS	**FORMAS DE SOLUCIÓN**
a) $\left(\sqrt{14}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{14}-\sqrt{13}\right)$	$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = x - y$
b) $\left(12-\sqrt{3}\right)\left(12+\sqrt{3}\right)$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
c) $\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)\left(4\sqrt{3}+2\sqrt{7}\right)$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$	Desarrollo binomial Multiplicar término con término de cada binomio

La propiedad 3 es de mucha utilidad en la racionalización de fracciones con radicales donde el denominador generalmente se expresará como una suma o diferencia de radicales.

OBJETIVO

Utilizar las diferentes formas de solución de productos de binomios con o sin radical.

EJEMPLO

Simplifica : $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión	:	$\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
Multiplica la expresión por $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}+5}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)$
Multiplica numeradores		$\dfrac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$
Multiplica denominadores aplicando la propiedad 3		$\dfrac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{-2}$
Simplifica la fracción		$\sqrt{5}-\sqrt{3}$

También es de mucha utilidad aplicar la forma *(a+b) (a-b)=a²-b²*, en el procedimiento de solución de algunos problemas.

En los ejemplos dados a continuación trata de razonar sobre el procedimiento de solución.

EJEMPLOS

1. Simplificar la expresión $\left(\sqrt{14}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{14}-\sqrt{3}\right)$

Solución		
Escribe la expresión dada	:	$\left(\sqrt{14}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{14}-\sqrt{3}\right)$
Aplica la propiedad 3	=	14-3
Simplifica	=	11

2. Simplifica la expresión: $\left(\sqrt{13}+1\right)\left(\sqrt{13}-1\right)$
(Observa que en éste caso los segundos términos de cada binomio no son radicales)

Solución

Escribe la expresión dada	:	$\left(\sqrt{13}+1\right)\left(\sqrt{13}-1\right)$
Aplica la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*:		$\left(\sqrt{13}\right)^2-(1)^2$
Simplifica		12

3. Simplifica $\left(20\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(20\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Solución

Escribe la expresión dada	: $\left(20\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(20\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$
Aplica la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*	$\left(20\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2$
Simplifica	1,200-2 1,198

4. Multiplica y simplifica la expresión: $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$
(En éste caso los términos de cada binomio son todos distintos por lo que se procede a multiplicar entre sí término con término de ambos binomios)

Solución

Escribe la expresión dada	: $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$
Multiplica término con término	$\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}=$
Factoriza 18 y simplifica	$\sqrt{9\cdot2}-\sqrt{2}$
Aplica la propiedad 1	$3\sqrt{2}-\sqrt{2}$
Simplifica	$2\sqrt{2}$

5. Racionaliza el denominador de la siguiente expresión y simplifica $\dfrac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión dada $: \dfrac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Multiplica la expresión por $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$ $\qquad \left(\dfrac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$

Multiplica numeradores y denominadores respectivamente $\qquad \dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{35}-2\sqrt{15}-10}{3-5}$

Simplifica $\qquad -\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{35}-2\sqrt{15}-10}{2}$

EJERCICIO 7.4

Multiplicar y simplificar cada problema

1) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$
2) $(\sqrt{12}-\sqrt{3})(\sqrt{12}+\sqrt{3})$
3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{17})(3\sqrt{2}-\sqrt{17})$
4) $(\sqrt{19}+\sqrt{2})^2$
5) $(\sqrt{13}-2)^2$
6) $\sqrt{5}(1-\sqrt{6})$
7) $(\sqrt{23}+2)(\sqrt{3}-5)$
8) $(4\sqrt{3}+2\sqrt{7})(3-\sqrt{2})$
9) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{5})(7\sqrt{2}+3\sqrt{5})$
10) $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)$
11) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
12) $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)$
13) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{14})$
14) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$
15) $\sqrt{3}(\sqrt{10}+4)$
16) $(-\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+1)$
17) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
18) $(\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2$
19) $(\sqrt{35}+\sqrt{102})(\sqrt{35}-\sqrt{102})$
20) $(\sqrt{3}+\sqrt{13})(\sqrt{3}-\sqrt{13})$

Racionalizar el denominador y simplificar cada uno de los siguientes problemas.

21) $\dfrac{50}{\sqrt{6}-1}$

22) $\dfrac{100}{1-\sqrt{5}}$

25) $\dfrac{\sqrt{2}+8}{8-\sqrt{11}}$

26) $\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

23) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$

24) $\dfrac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$

27) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{\sqrt{7}-\sqrt{13}}$

28) $\dfrac{\sqrt{81}}{9+\sqrt{14}}$

7.5 RAÍCES CUADRADAS DE EXPRESIONES

En esta sección, se tratará con expresiones con radicales conteniendo variables. Se utilizarán mecanismos de solución sencillos y procedimientos semejantes a los anteriores.

OBJETIVO

Dada una expresión radical con variables, simplificarla.

El mecanismo de solución para simplificar $\sqrt{(-5)^2}$ consiste en expresar la solución como el valor absoluto de -5, esto es:

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

En general, para obtener la solución de $\sqrt{(x)^2}$, se escribe:

$$\sqrt{(x)^2} = |x|$$

EJEMPLOS

1. Simplifica $\sqrt{y^7}$, donde *y* es un número positivo.

Solución

Escribe la expresión dada $: \sqrt{y^7}$

Factoriza y^7 $\qquad \sqrt{y^6 \cdot y}$

Aplica la propiedad 1 $\qquad \sqrt{y^6}\cdot\sqrt{y}$

Transforma= $\sqrt{y^6}$ a la forma $\sqrt{(x)^2}$ $\qquad \sqrt{(y^3)^2}\cdot\sqrt{y}$

Simplifica $\qquad y^3\sqrt{y}$

2. Simplifica la expresión $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

2. Simplifica la expresión $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

Solución

Escribe la expresión dada : $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

Factoriza x^5 $\dfrac{\sqrt{x^4\cdot x}}{\sqrt{y}}$

Aplica la propiedad 1 $=\dfrac{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Transforma $\sqrt{x^4}$ a la forma $\sqrt{(x)^2}$ $=\dfrac{\sqrt{(x^2)^2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Simplifica $=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

De aquí en adelante, se utiliza el mismo mecanismo de solución aplicado anteriormente, en la racionalización del denominador.

Multiplica por $=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

Simplifica $=\dfrac{x^2\sqrt{xy}}{y}$

3. Simplifica $\sqrt{y^2+14y+49}$

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{y^2+14y+49}$

Factoriza el radicando $=\sqrt{(y+7)^2}$

Obtén la raíz cuadrada aplicando la forma $\sqrt{(x)^2}=|x|$ $=|y+7|$

Observación: Conviene dejar así la respuesta porque "y+7" podría ser negativo.

EJERCICIO 7.5

Obtén una expresión más simple en cada uno de los siguientes ejercicios.

1) $\sqrt{x^9}$

2) $\sqrt{x^{10}}$, con $x\geq 0$

3) $\sqrt{x^3\cdot x^8}$

4) $\sqrt{y^5\cdot y^5}$

5) $\sqrt{x^2y^4}$

6) $\sqrt{\dfrac{x^{20}}{2}}$

7) $\sqrt{\dfrac{x^{100}}{4}}$

8) $\sqrt{y^7w^5z^2}\,, y\geq 0, z\geq 0$

9) $\sqrt{y^{50}}$

10) $\sqrt{x^{44}}$

Simplifica cada uno de los siguientes problemas

11) $\sqrt{x^8}$

12) $\dfrac{\sqrt{x^{13}}}{4}$

13) $\sqrt{6x^2}\cdot\sqrt{6x^8}$

14) $\sqrt{(x+3)^2}$

15) $x\sqrt{x^{10}}$

16) $\sqrt{16y^{10}}\,, y\geq 0$

17) $\dfrac{12\sqrt{100x^4}}{2\sqrt{36x^4}}$

18) $\sqrt{y+1}\cdot\sqrt{y+1}$

19) $\sqrt{(x-5)^4}$

20) $\sqrt{(y-5)^3}$

7.6 ECUACIONES CON RADICALES

En ésta sección se trataran ecuaciones con radicales de las cuales se podrá obtener el valor de la variable involucrada.

Para solucionar expresiones tales como como $\sqrt{x-6}=3$, se seguirá el siguiente mecanismo de solución.

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{x-6}=3$

Obtén el cuadrado de ambos miembros de la igualdad $(\sqrt{x-6})^2=(3)^2$

Simplifica la expresión x-6=9