Nota: En éste tipo de problemas siempre se debe sustituir el valor obtenido de la variable en la ecuación original, pues a veces aparecen soluciones extrañas

$\sqrt{x-6}=3$

Esto es:

sustituye por la variable *x* por 15

$\sqrt{15-6}=3$

Simplifica el radical

3=3

En el siguiente ejemplo se verá lo importante que es sustituir el valor de la variable obtenida en la ecuación original.

EJEMPLO

Simplifica $\sqrt{2x}+4=x$

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{2x}+4=x$

Agrega (-4) a cada miembro $\sqrt{2x}+4-4=x-4$

Obtén el cuadrado en ambos miembros de la igualdad $(\sqrt{2x})^2=(x-4)^2$

Efectúa operaciones en ambos miembros $2x=x^2-8x+16$

Agrega "-2*x*", a cada miembro $x^2-10x+16=0$

Factoriza la expresión $(x-8)(x-2)=0$

Resuelve para *x*, igualando a cero cada factor $x=8;\ x=2$

Sustituye cada valor obtenido en la ecuación original

Con *x=8*

Obtén la raíz cuadrada de 16 4+4=8

8=8

Con *x=2*

Obtén la raíz cuadrada de 4 $2+4\neq 2$

Observa como para *x*=2, la respuesta obtenida no satisface la ecuación original.
El valor *x*=2 es una raíz extraña por no satisfacer la en la ecuación original

$\sqrt{2x}+4=x$

Luego la única solución es *x*=8

OBJETIVO

Resolverás ecuaciones con radical y comprobarás la(s) respuestas obtenidas de la variable para determinar si son soluciones extrañas o no.

EJEMPLOS

1. Resuelve y comprueba la solución de la siguiente ecuación $\sqrt{x-9}=1$

Solución

Escribe la ecuación dada : $\sqrt{x-9}=1$

Obtén el cuadrado en ambos miembros $x-9=1$

Agrega 9 en ambos miembros $x=10$

Ahora, sustituye el valor *x*=10 en la ecuación original.

Entonces $\sqrt{10-9}=1$

Simplificando el radical 1=1

2. Resuelve y comprueba la solución de la ecuación $32+\sqrt{y}=7$

Solución

Escribe la ecuación dada : $32+\sqrt{y}=7$

Agrega (-32) en ambos miembros $\sqrt{y}=-25$

Obtén el cuadrado en ambos miembros $y=625$

Ahora, checa el valor *y*=625 en la ecuación original.

Entonces $32+\sqrt{625}=7$

Simplificando el radicando 32+25=7

De donde $57\neq 7$

Por lo tanto *y*=625, es una raíz extraña

NOTA: Desde la igualdad $\sqrt{y}=-25$ podemos afirmar que la ecuación $32+\sqrt{y}=7$ no tiene solución.

EJERCICIO 7.6

Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar la solución obtenida.

1) $2\sqrt{x+3}=14$

2) $\sqrt{x}+17=-1$

3) $3-\sqrt{2x}=x$

4) $11-\sqrt{y+4}=17$

5) $\sqrt{y-7}-3=5$

6) $\sqrt{x}+5=3$

7) $\sqrt{5x+11}=9$

8) $11-\sqrt{x+4}=17$

9) $\sqrt{x}-x=5$

10) $\sqrt{x+2}+4=5$

11) $-\sqrt{3x}+4=x$

12) $1-\sqrt{x-1}=2x$

13) $\sqrt{x}+2\sqrt{x}=0$

14) $\sqrt{x}+7=16$

15) $\sqrt{x-7}-3=5$

7.7 NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Recordemos que un número racional es todo número que tiende a escribirse como el cociente de dos enteros. Es decir, dado un número n podemos afirmar que es racional si existen enteros a, b $(b \neq 0)$ tales que :

$n = \frac{a}{b}$. Así, por ejemplo: $\frac{3}{8}$ y $-\frac{5}{12}$ son, por definición racionales.

Sin embargo, otras veces el carácter racional de un número no es tan evidente, como por ejemplo : si tenemos n=0.84, que no está expresado como el cociente de dos enteros ; pero esto puede hacerse muy fácilmente pues:

$$0.84 = \frac{84}{100} = \frac{21}{25}$$

No tan inmediato es el caso de n=0.5555.... donde el 5 se repite indefinidamente.

Este número es racional pues:

$10n$=5.555... lo que puede escribirse así:

$10n$=5 + 0.5555...

= 5 + n. De aquí:

$9n$ = 5 , de donde obtenemos:

$n = \frac{5}{9}$, que es el cociente de dos enteros, luego n es racional.

Procediendo de manera similar se puede comprobar que:

Si m =0.8888...

Este número es racional y la fracción que lo "genera" es $\frac{8}{9}$.

Esto es muy fácil de verificar, para lo cual basta dividir 8 entre 9.

Otro ejemplo:

Tenemos ahora:
0.5333...
En el cual los puntos suspensivos indican que el 3 se repite <u>indefinidamente.</u>
Pongamos:
p=0.5333...

Podemos escribir :
p= 0.5 + .333...

El primer sumando 0.5 es igual a, $\frac{5}{10}$, que es igual a $\frac{1}{2}$.

Veamos ahora que fracción "genera" 0.333...

g= 0.0333...
$100g$=3.333...
pero $10g$=0.333...

Restando queda:

$90g$=3

$g = \frac{1}{30}$

Por tanto, p= $\frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

Conclusión:

La fracción decimal 0.5333... es un número racional, pues puede expresarse como el cociente de los dos enteros 8 y 15.

<u>Importante</u>

Los números:
0.555... y 0.888...
Son decimales periódicos y, como ya hemos visto, son racionales : en el primero el período es 5 ; en el segundo, es 8. Como en ninguno de ellos aparace otro dígito disitinto al 5 o al 8 , ambos se dicen : periódicos puros. En cambio, 0.5333... es periódico mixto pues hay un número que no forma parte del período, el 5 (el período es 3)

También son periódicos:
0.434343...
0.152152152...
0.72939393...

Los dos primeros son periódicos puros, el tercero es periódico mixto y, desde luego, todos son números racionales.

Se puede establecer, se puede <u>demostrar</u> que todo decimal, periódico puro o mixto, es igual a un número racional : <u>es</u> un número racional.

Número Irracional

Un número real no racional, o sea que no puede expresarse como el cociente de dos enteros se llama : Irracional.

Supongamos que tenemos:
a = 0.12345678923456789345678...

En este caso no podemos afirmar ni negar que este número sea racional pues el período pudiera estar formado por 25 dígitos que aquí aparecen y entonces *a* sería periódico. Pero también pudiera ocurrir que el período tuviera un número de dígitos mayor que 25 y en tal caso, como solamente tenemos escritos 25, no nos daríamos cuenta de la racionalidad o mejor aún, no nos daríamos cuenta de la periodicidad y, por consiguiente, no podríamos afirmar la racionalidad, aunque tampoco negarlo.

Supongamos ahora que nos planteamos la siguiente pregunta : el número $\sqrt{2}$, ¿será racional o irracional ? Si empleamos una calculadora obtenemos una "aproximación" de este número en forma racional :

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

donde no observaríamos ningún grupo de dígitos que se repetiría indefinidamente. Estaríamos, pues, en situación similar al ejemplo anterior, es decir, en el del número "*a*" : no podríamos ni afirmar, ni negar que $\sqrt{2}$ es racional. Sin embargo empleando recursos no muy complicados podemos demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Veámoslo a continuación:

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Supongamos que fuese racional. Entonces existirían *a* y *b* naturales tales que :

I) $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$

donde podemos añadir que *a* y *b* sean primos entre sí. Esto último es muy importante para lograr la demostración que nos propusimos.

Elevando al cuadrado en ambos miembros de I) tendremos :

$2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ y de aquí:

II) $2b^2 = a^2$

Hemos llegado a la conclusión de que, si I) fuese cierto, a^2 tendría que ser par, pero si el cuadrado de un entero es par, el número tendría que ser par, es decir, existiría un entero *c* tal que *a=2c*.

Sustituyendo en II) resultaría
$2b^2 = 4c^2$ Dividiento por 2:
$b^2 = 2c^2$ Es decir, b^2 sería par, por tanto *b* también sería par. Pero entonces llegaríamos a una contradicción porque, como *a* y *b* tendrían que ser pares, no serían primos entre sí.

De modo que, partimos de la suposición de que $\sqrt{2}$ es racional, y razonando correctamente, llegamos a una contradicción.

Por tanto $\sqrt{2}$ no es racional. Y al no se racional, es irracional.

Veamos otro caso:
Demostrar que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

Supongamos que no lo sea. Entonces: existirían dos números naturales *a* y *b* tales que $\sqrt[3]{2} = \dfrac{a}{b}$.

Añadamos la condición de que esta fracción sea irreducible, es decir, que el único factor común de *a* y *b* es uno.

Entonces tendríamos : $2 = \dfrac{a^3}{b^3}$ luego $a^3 = 2b^3$.

a^3 sería par, y , en consecuencia *a* también sería par ; de lo contrario sería impar y su cubo también, lo cual estaría en contradicción con la igualdad $a^3 = 2b^3$. Como *a* es, necesariamente par, existe *c* natural tal que *a=2c*.

$8c^3 = 2b^3$ $b^3 = 4c^3$ implicaría *b* par. Pero con *a* y *b* pares, $\dfrac{a}{b}$ no sería irreducible lo que está en contradicción con la hipótesis de que $\dfrac{a}{b}$ es irreducible.

Por tanto $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

El procedimiento utilizado en los casos anteriores sea para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ puede ser utilizado en casos similares con el mismo propósito.

Supongamos que se nos plantea la siguiente pregunta:
El número $\sqrt[3]{11}$ ¿ Será racional o irracional?
Vamos a partir de la hipótesis (es decir, de la suposición) de que dicho número fuese racional. Existirían entonces dos números naturales a y b tales que:

I) $\sqrt[3]{11} = \dfrac{a}{b}$ con a y b primos entre sí (es decir con la fracción $\dfrac{a}{b}$ irreducible)

Hagamos ahora una operación correcta : elevemos al cubo ambos miembros de I).

Nos quedaría $11 = \dfrac{a^3}{b^3}$ y, por tanto $a^3 = 11b^3$ y de aquí:

II) $a^3 = 11b^3$. De modo que a^3 sería divisible por 11, lo que nos llevaría a la conclusión de que a también lo sería, o sea, existiría *c* natural tal que *a=11c* sustituyendo en II) :

$11^3c^3 = 11b^3$ dividiendo por 11 ambos miembros;

$11^2c^2 = 11b^3$ es decir *b* sería divisible por 11 y, por tanto, también lo sería *b*.

De modo que si suponemos que $\sqrt[3]{11}$ es racional igual a la fracción irreducible $\dfrac{a}{b}$ efectuando operaciones correctas , llegaríamos a una contradicción, es decir , a que *a* y *b* serían ambos divisibles por 11. Esto nos lleva a la conclusión de que $\sqrt[3]{11}$ es racional ES FALSA. Y, como $\sqrt[3]{11}$ no puede ser racional, tiene que ser irracional.

Finalmente añadiremos que, para todo número primo *p* y todo número natural $n \geq 2$, el número $\sqrt[n]{p}$ es siempre irracional.

Así por ejemplo :

$\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt[5]{3}$, etc, son irracionales.

RESUMIENDO:

1.- Si tenemos un número expresado como el cociente de dos enteros, dicho número es por definición , racional.

Ejemplo :

$\dfrac{4}{9}, -\dfrac{6}{5}, \dfrac{20}{43}$, etc.

2.- Un decimal que tiene un número limitado de cifras después del punto decimal, es racional.

Ejemplo :

0.396
5.43
0.00293

3.- Un decimal que tenga un grupo de dígitos que se repiten indefinidamente, se dice que es un decimal periódico y es siempre un número racional.

Ejemplo :

0.22222...
0.391391...
4.828282...
1.6454545...

4.- Si *p* es primo y *n* natural, $n \geq 2$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

Ejemplo:

$\sqrt[5]{7}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[8]{17}$.

Nota: Además de los números irracionales de la forma indicada en el 4° punto, hay muchos otros, pero son casos que no estudiaremos ahora.

EJERCICIO 7.7

Expresa en forma de decimal exacto o periódico los siguientes números racionales

1) $\dfrac{13}{25}$ 2) $\dfrac{19}{32}$

3) $\dfrac{3}{7}$ 4) $\dfrac{41}{125}$

Dí cuáles de los siguientes números son racionales. En los casos en que la respuesta sea afirmativa, explica porqué sabes que son racionales.

5) 0.34 6) 3.4141...
7) 0.4444... 8) 3.41
9) 0.7373... 10) $\sqrt[3]{19}$
11) 2.5555... 12) 0.41
13) 0.696969... 14) 0.4141
15) 2.11111... 16) 0.4141...
17) 0.68 18) 0.24141...
19) 0.92424... 20) $\sqrt{23}$
21) 0.924 22) 0.013013

En los casos en lo que ello sea posible, expresa los números siguientes como el cociente de dos enteros, dando la respuesta como una fracción irreducible.:

23) 0.52 24) 0.2111...

25) 0.4 26) $\sqrt{5}$

27) 0.444... 28) $\frac{4}{9}$

29) 0.5252 30) $\sqrt{0.36}$

31) 1.1111 32) $\sqrt{0.4444\ldots}$