SERIE DE LOS TRATADOS.

TOMO I.

1. Geometria Elementar.
2. Arithmetica Inferior.
3. Geometria Practica.

TOMO II.

4. Arithmetica Superior.
5. Algebra.
6. Musica.

TOMO III.

7. Trigonometria.
8. Secciones Conicas.
9. Maquinaria.

TOMO IV.

10. Easttica.
11. Hidrostatica.
12. Hidrotechnia.
13. Hidrometria.

TOMO V.

14. Arquitectura Civil.
15. Montea, y Canteria.
16. Arquitectura Militar.
17. Pirotechnia, ò Artilleria.

TOMO VI.

18. Optica.
19. Perspectiva.
20. Catoptrica.
21. Dioptrica.
22. Meteoros.

TOMO VII.

23. Astronomia.

TOMO VIII.

Astronomia Practica.
24. Geographia.
25. Nautica.

TOMO IX.

26. Gnomonica.
27. Ordenacion del tiempo.
28. Astrologia.

Lic. Blas M. Valdeiro

IN.

TRATADO VII.
DE LA
TRIGONOMETRIA.

TRigonometria, segun la etimologia de su nombre, es lo mismo, que *Medida de Triangulos*; y considerada segun toda esta extension, comprehende todos los Theoremas, y Problemas, que demuestran, y enseñan el modo de medir los lados, y areas de los triangulos; pero en el tratado presente, solo entendemos por *Trigonometria una ciencia que enseña el modo de resolver los triangulos.*

La *resolucion de los triangulos*, consiste en una artificiosa inquisicion de los lados, y angulos ignorados, deducida de los que se suponen conocidos; y porque la *Trigonometria* enseña esta resolucion, se llama *Ciencia Analytica*, ò *Resolutiva*.

Dos especies hay de triangulos, unos *planos*, y *rectilineos*; otros *esfericos*, y *curvilineos*. Los triangulos *planos*, y *rectilineos*, son los que se forman con lineas rectas sobre una superficie plana. Los *esfericos*, y *curvilineos*, son los que en la superficie de la esfera se forman con tres arcos de circulos maximos.

Conque la Trigonometria es en dos maneras, *plana*, ò *rectilinea*, y *esferica*, ò *curvilinea*. La primera enseña la resolucion de los triangulos planos; y la segunda, la de los esfericos.

La utilidad, y necessidad de la Trigonometria, es bien notoria, pues apenas se hallarà parte alguna en la Mathematica, que no necessite de ella, assi para facilitar sus operaciones, como para aumentar sus Problemas. Hallase ya en nuestros tiempos en gran manera facil su exercicio: consiste èste, como he dicho, en resolver los triangulos, infiriendo por regla de tres el conocimiento de los angulos, y lados ignorados, de la noticia de los que se suponen dados, y conocidos, para lo qual se requiere necessariamente saber la proporcion que en qualquiera circulo tienen las cuerdas entre sì, y con el radio: porque como dixe en la *Geometr. Element.* en el *corol.* de la *propos.* 1. del *libr.* 8. los arcos, y cuerdas de diferentes circulos tienen entre sì la misma razon que los radios: conque sabida en qualquiera circulo la razon que tienen las cuerdas con el radio, se inferirà en todos los demàs por regla de tres la magnitud de sus cuerdas del conocimiento de otras, y por consiguiente se conoceràn los arcos, y angulos que les corresponden; y porque los lados de qualquier triangulo, son cuerdas del circulo, que se le puede circunscrivir por la *propos.* 5. del *lib.* 4. de Euclides, se sabrà por dicha regla de tres qualquiera lado, y angulo, sabida la proporcion que tienen las cuerdas entre sì, y con el radio.

Esta proporcion se halla en las Tablas llamadas *Canon Trigonometrico*, instituidas para este fin, de las quales se valieron los Mathematicos, aunque con la fatiga de la multiplicacion, y particion de numeros muy crecidos, hasta el año 1614. en que Don Juan Nepero, Cavallero Escocès, Varon de Merchiston, hallò el artificio noble de unos numeros, llamados *Logarithmos*, que substituidos en el canon trigonometrico, en lugar de los antiguos, han facilitado en tanto grado las operaciones, que se resuelven en menos de una hora mas triangulos, que por el canon an-

tiguo se resolvian en muchas, con lo que han conseguido las ciencias Mathematicas, la dicha que expressa el Obispo Caramuel, en la forma siguiente.

Metitur Terram, Mare, Ventos, Astra Mathesis,
Antiqua immenso tempore; nostra, brevi.

Este es en breve el exercicio, y progresso de la Trigonometria, que con la brevedad, y claridad possible explico en este tratado.

LIBRO I.

DE LOS SENOS, TANGENTES, y Secantes; y del Canon Trigonometrico.

DEFINICIONES.

1 Medida de qualquier angulo rectilineo, *es el arco de circulo descrito del punto en que concurren las lineas, y comprehendido entre ellas.* Suponese qualquiera circulo dividido en 360. grados, cada grado en 60. minutos, cada minuto en 60. segundos, cada segundo en 60. tercios, y assi infinitamente: y por exemplo, si el arco CB (*fig.* 1.) es de 42. grados, y 24. minutos, diremos, que el angulo CAB, es de 42. grad. y 24. minut. y assi de los demàs.

2 *Complemento de un angulo agudo, ù de un arco menor que el quadrante, es lo que le falta para igualarse con el quadrante, ò con el semicirculo. Complemento de un angulo obtuso, ò de un arco mayor que el quadrante, es lo que le falta para igualarse con el semicirculo.* Y assi el complemento del angulo agudo CAB, ù del arco CB, hasta el quadrante, es el arco CF, ò an-

angulo CAF, y hasta el semicirculo es el arco CD, ò angulo CAD; y el complemento del angulo obtuso DAC, ò arco DC, es el angulo CAB, ò el arco CB.

3 *Cuerda, ò subtensa de un arco, es la recta que junta las extremidades del arco:* como CG, es cuerda del arco CBG, porque junta sus extremidades; y como tambien junte las del arco CDG, es tambien cuerda de dicho arco.

4 *Seno recto, ò seno primero de un arco, ò angulo, es la perpendicular, que cae de la extremidad del arco, sobre el diametro, que passa por la otra extremidad:* como el seno recto, ò primero del angulo CAB, ù del arco CB, es la perpendicular CE, que cae de la extremidad C del arco sobre el diametro DB, que passa por el otro extremo B.

De que se infiere, que el seno recto, ò primero de un arco, es la mitad de la cuerda del arco duplo, porque (3. 3. Eucl.) CE es la mitad de CG, cuerda del arco CBG, duplo de CB. Tambien se infiere, que assi como CG es juntamente cuerda del arco CBG, y del arco CDG, assi tambien CE es juntamente seno recto, ò primero del arco CB, mitad de CBG, y del arco CFD, mitad de CDG: conque el seno recto de un arco, ò angulo, es juntamente seno recto, ò primero del complemento de dicho arco, ò angulo al semicirculo.

Adviertase, que siempre que se halle absolutamente este nombre seno, se ha de entender el seno recto, ò primero.

5 *Seno segundo, ò seno del complemento de un arco, ò angulo es el seno recto, ò primero del complemento de dicho arco, ò angulo:* como CI, que es seno recto, ò primero del arco FC, es seno segundo, ù del complemento, respecto del arco CB, y se llama *seno del complemento de CB*, por ser seno primero del arco FC, que es complemento de BC, hasta el quadrante. El seno segundo de un angulo obtuso, ò arco mayor que el quadrante, es el mismo seno recto, ò primero del arco en que excede al quadrante; y assi el arco DFC, cuyo seno primero es CE, tendrà por seno segundo la IC, que es seno recto del arco FC, en que DFC excede al quadrante DF.

6 *Seno todo, ò total, es el seno recto del quadrante, ò arco de 90. grad. el qual es el mismo radio.* Y assi el radio FA es seno to-

total, por ser seno del quadrante FB. El seno total, es el mayor de todos los senos rectos, porque los arcos mayores que el quadrante, tienen su seno recto menor, que el radio, como consta de lo dicho arriba.

7 *Seno verso, ò sagita, es la porcion del diametro, comprehendida entre el seno recto de un arco, y el mismo arco.* Y assi EB es el seno verso del arco CB: assimismo ED, es el seno verso del arco CFD. De que se colige, que el seno verso de un arco menor que el quadrante, ù de un angulo agudo, es lo que sobra del radio, si de este se quita el seno segundo: como si del radio AB se quita IC, ò AE su igual, el residuo EB es el seno verso del arco CB; pero el seno verso del angulo obtuso DAC, ù del arco CD, es igual à la suma del radio DA, con AE, seno segundo de dicho arco.

8 *Tangente, generalmente es qualquiera linea, que toca al circulo en un punto, y es perpendicular à la extremidad del radio.* (16. 3. *Euclid.*)

9 *Tangente especial de un arco, es la recta que toca al circulo en la extremidad de aquel arco, y se termina en el concurso de otra recta, tirada del centro por la otra extremidad del mismo arco:* como la recta BH, es tangente del arco CB, y esta se llama *tangente primera*, à diferencia de la tangente segunda. *Tangente segunda* de un arco menor que el quadrante, es la tangente primera del complemento del dicho arco al quadrante; y assi la recta FL es la tangente segunda del arco CB, porque es tangente primera del arco FC, complemento del arco BC, hasta el quadrante BF.

10 *Secante de un arco, es la recta, que saliendo del centro del circulo, passa por la extremidad de dicho arco, hasta encontrar con la tangente. Secante primera de un arco, es la que se termina en su tangente primera. Y secante segunda, la que se termina en la tangente segunda del mismo arco:* y assi AH, es la secante primera del arco BC, porque se termina en BH, tangente primera de dicho arco; y AL es secante segunda, por terminarse en FL, tangente segunda del mismo arco.

Adviertase, que los angulos obtusos, y arcos mayores que el quadrante, no tienen otras tangentes, ni secantes, que las de sus complementos al semicirculo; y assi, la tangente primera del arco DFC, es HB; y su tangente se-

segunda es FL: y assimismo, la secante primera de dicho arco, es AH; y la secante segunda, es AL.

CAPITULO I.

DE LOS FUNDAMENTOS, Y COMPOSICION DEL CANON de los Senos.

EL Canon Trigonometrico se compone de los senos, tangentes, y secantes de todos los arcos del quadrante, desde el arco de un minuto, hasta el de 90. grados. Expressanse en las partes del radio, que proporcionalmente tocan à cada uno; porque como el radio, ò seno total sea el principal, se supone dividido en 10000000. ò mas partes; y se busca quantas de estas partes tocan à cada seno, tangente, y secante, con las quales se ordenan las tablas. Esta cantidad de los senos, se halla con las proposiciones siguientes.

PROP. I. Problema.

Conocida la cuerda de un arco, hallar la cuerda del arco restante, hasta el semicirculo. (fig. 2.)

SEa conocida la cuerda AB; esto es, sepase quantas partes tiene del diametro CA; y se busca quantas de las dichas partes le caben à la cuerda BC. *Operacion.* Quadrese CA, multiplicando su numero por sì mismo. Quadrese assimismo AB: restese el quadrado de AB, del quadrado de CA, y el residuo serà el quadrado de BC; y su raiz quadrada serà la cuerda BC.

Demonstracion. El angulo B en el semicirculo es recto: (31.3. Eucl.) luego (47.1.) el quadrado de AC, es igual à los quadrados de AB, BC: luego, restando el quadrado de AB, del quadrado de AC, el residuo serà el quadrado de BC, cuya raiz es el lado BC.

PROP.

PROP. II. Problema.

Dado el seno primero de un arco, hallar el seno segundo, ù del complemento del mismo arco. (fig. 3.)

DAdo CB, seno primero del arco AB, se busca FB, seno segundo del mismo arco, ù del complemento BE. *Operacion.* Restese el quadrado de CB, del quadrado del radio DB, y el residuo serà el quadrado de DC, ù de FB su igual; y su raiz quadrada serà el seno FB. Demuestrase como la antecedente, por ser recto el angulo C.

PROP. III. Problema.

Dado el seno de un arco, hallar el seno del arco duplo, y del subduplo. (fig. 4.)

COnocida la recta CF, seno recto del arco CG, se busca DE, seno recto del arco DC, duplo de CG. *Operacion.* Busquese por la antecedente el seno segundo del arco CG, que es BF; y hagase una regla de tres: como el radio BC, al seno segundo BF, assi toda la cuerda CD, que es el seno CF duplicado, à la recta DE, que es el seno del arco DGC, que se desea.

Demonstr. Los triangulos BFC, EDC, son proporcionales, por tener los angulos E, F, rectos, y el angulo C comun: luego serà BC con BF, como CD con DE.

Conocido DE, seno del arco DGC, se conocerà el seno CF del arco CG, mitad de DGC; porque conocido el seno DE, se sabe (2) el seno segundo BE; y restando èste del radio BC, se conoce la EC; y siendo (47.1.) los quadrados de DE, y EC iguales al quadrado de DC, si se suman dichos quadrados, y de la suma se saca la raiz quadrada, se sabrà la cuerda DC, cuya mitad serà el seno FC.

COROLARIO.

EL *seno de la mitad de un arco, es medio proporcional entre el semiradio, y el seno verso de todo el arco; esto es, CF, seno del arco CG, mitad de CGD, es medio proporcional entre la mitad del*

del radio BC, y EC, ſeno verſo de todo el arco CGD. La razon es, porque ſiendo proporcionales los triangulos BTC, DEC, ſerà el radio BC à CD, como CF à EC: y ſiendo BC à CD, como la mitad de BC à la mitad de CD, ſerà la mitad del radio BC à la mitad de CD, eſto es, à CF, como CF à CE.

PROP. IV. Problema.

Dados los ſenos de dos arcos, hallar el ſeno del agregado de dichos arcos. (fig. 5.)

SUponenſe conocidos BG, ſeno del arco AB; y CI, ſeno del arco BC: y ſe buſca el ſeno CD, que lo es del arco CA, compueſto de los dos AB, y BC. Tireſe la IH, paralela à BG; y la EI, paralela à FA. *Operacion.* Halleſe (2.) la FI, ſeno ſegundo del arco CB, y hagaſe una regla de tres: como el radio FB al ſeno ſegundo FI, aſsi el ſeno BG al quarto termino, y ſaldrà la recta IH. Hecho eſto, buſqueſe (2.) FG, ſeno ſegundo del arco BA, y ſe formarà otra regla de tres: como el radio FB al ſeno ſegundo FG, aſsi CI, ſeno primero de CB, à la linea CE: ſumeſe CE con IH, ò ED ſu igual, y ſerà la ſuma toda la recta CD, ſeno del arco AC.

Demonſtr. Los triangulos FOD, FHI, FGB, ſon equiangulos, por ſer rectangulos, y tener el angulo F comun. Tambien los triangulos FOD, COI, ſon equiangulos, por ſer rectangulos en D, y en I, y tener los angulos en O verticales iguales: (15. 1.) aſsimiſmo ſon equiangulos EIC, OIC: (8.6.Eucl.) luego los triangulos EIC, FHI, FGB, ſon equiangulos: luego (4. 6. Eucl.) ſerà FB radio, à FI ſeno ſegundo de CB, como BG, ſeno primero de BA, à IH, ò ED ſu igual: y aſsimiſmo como FB radio, à FG, ſeno ſegundo de BA: aſsi CI, ſeno primero de CB, à CE, que añadida à ED, hace todo el ſeno CD, que ſe buſcava.

PROP. V. Problema.

Dados los ſenos de dos arcos, hallar el ſeno de la diferencia de los miſmos arcos. (fig. 5.)

SEan conocidos BG, ſeno del arco AB; y CD, ſeno del arco AC; y ſe buſca el ſeno CI del arco CB, que es la di-

diferencia de los arcos AC, AB. *Operacion.* Halleſe (2) FG, ſeno ſegundo del arco AB; y FD, ſeno ſegundo del arco AC, y hagaſe eſta regla de tres: como FG, ſeno ſegundo del arco AB, à BG, ſeno primero del miſmo arco, aſsi FD, ſeno ſegundo del arco AC, à DO: reſteſe DO de DC, ſeno del arco AC, y el reſiduo ſerà la linea OC. Hagaſe aora otra regla de tres: como el radio FB, à FG, ſeno ſegundo del arco AB, aſsi OC, à CI, ſeno primero del arco CB, que ſe buſcava. Conſta de lo dicho en la prop. anteced.

PROP. VI. Theorema.

Los ſenos de los arcos muy pequeños, tienen entre sì ſenſiblemente la miſma razon que los arcos.

SUpongamos dos arcos, el uno de un minuto, y el otro de un tercio de minuto. Digo, que por ſer tan pequeños, tienen ſenſiblemente ſus ſenos la miſma razon que dichos arcos; eſto es, que aſsi como el arco de un minuto es triplo del arco que vale un tercio de minuto, aſsi el ſeno de aquel ſerà, aunque no en todo rigor, pero ſenſiblemente, triplo del ſeno de èſte. La razon es, porque al principio del quadrante la circunferencia del circulo es perpendicular al diametro; y ſiendo tambien los ſenos perpendiculares al diametro, y tan poco diſtantes del arco por ſu pequeñèz, coinciden ſenſiblemente con la particula de arco, de quien ſon ſenos: luego ſenſiblemente tendràn la miſma razon que los arcos.

PROP. VII. Theorema.

La cuerda de 60. grados es igual al radio.

LA razon es clara, porque todo el circulo conſta de 360. grados, cuya ſexta parte ſon 60. grados, y por conſiguiente, la cuerda de 60. grados, es el lado del exagono; èſte es igual al radio: (*corolar. de la prop. 14. lib. 3. de la Geom. Pract.*) luego la cuerda de 60. grados es igual al radio.

Eſtas propoſiciones ſon baſtantes para fabricar la tabla de los ſenos,

senos, como verèmos en la propos. siguiente: à mas de ellas hay otras que sirven para disminuir el trabajo; pero como las tablas estèn ya fabricadas, bastan las sobredichas para que se entienda el fundamento en que consisten, que es unicamente lo que se pretende.

PROP. VIII. Problema.

Fabricar por las reglas sobredichas la Tabla de los senos.

1 Supongase el seno total, ò el radio dividido en un cierto numero de partes, que sea crecido, como en 10000000. este (7.) es igual à la cuerda de 60. grados: luego su mitad es el seno de 30. grados.

2 Sabido el seno de 30. grad. se sabrà (3.) el seno de la mitad de dicho arco, que es de 15. grad. y sabido èste, se sacarà el de 7. grad. 30. min. que es el de su mitad: luego el de 3. grad. 45. min. y assi consecutivamente se iràn hallando los senos de los arcos subduplos, hasta llegar al seno del arco de 52. seg. 44. ter. 3. quart. 45. quint.

3 Hecho esto, se buscarà el seno de un minuto en esta forma; porque el ultimo seno que se ha hallado de 25. seg. 44. ter. &c. es muy pequeño, como tambien el seno de un minuto, tendràn entre sì (6.) la misma razon que sus arcos. Reduzgase pues el arco de 52. seg. 44. ter. 3. quar. 45. quint. à quintos, que es la ultima especie, y seràn 11390625. quintos. Reduzgase tambien à quintos un minuto, y seràn 12960000. quintos; y se harà una regla de tres: como 11390625. à 12960000. assi el seno que se hallò de los 52. seg. 44. ter. 3. quar. 45. quin. al seno de un minuto, y se tendrà este seno.

4 Hallado el seno de un minuto, y los arriba dichos, se hallaràn todos los intermedios que faltan hasta 30. grados, porque hallado el seno de un minuto, se hallarà (3.) el de dos minutos; y assimismo, hallado el seno de 2. min. se hallarà el de 4. minutos: luego el de 8. min. 16. min. &c. y de los arcos duplos, como se siguen hasta el seno de 17. grad. 4. min.

5 Los demàs intermedios se hallaràn por la *propos.* 4. con este orden: Dado el seno de 1. min. y el seno de 2. min. se

se hallarà el seno de 3. min. Dado el seno de 4. min. y el seno de 1. min. se hallarà el seno de 5. y assi de los demàs, hasta que se hayan hallado todos, hasta llegar al de 30. grados.

6 Hecho esto, se hallarà el seno de 45. grados, ù del medio quadrante en esta forma: Dupliquese el quadrado del radio DA, (*fig.* 1.) y este duplo serà el quadrado de DF, (47. 1.) que es la cuerda de 90. grados: saquese la raiz quadrada del mismo duplo, y se sabrà la DF, cuya mitad serà la DK, seno de los 45. grados; y prosiguiendo con el mismo artificio, que antes se dixo num. 4. y 5. se sacaràn los senos de todos los arcos que hay entre 30. y 45. grados.

7 Ultimamente, los senos de los demàs arcos hasta 90. grados, se hallaràn por la *propos.* 2. por ser los senos segundos, ù de los complementos al quadrante, de los que se han hallado.

CAPITULO II.

DE LOS FUNDAMENTOS, Y COMPOSICION DEL CANON de las Tangentes, y Secantes.

PROP. IX. Theorema.

Como el seno segundo AE (fig. 1.) del arco BC, al seno primero EC del mismo arco, assi el radio AB, à la Tangente BH.

Demonstracion. En el triangulo ABH, es el seno EC paralelo à la tangente BH: luego (2. 6. Eucl.) serà AE à EC, como AB à BH.

De aqui se colige, que para hallar todas las tangentes, se formarà una regla de tres: como el seno segundo de un arco, al seno primero del mismo arco, assi el radio à la tangente del mismo.

PROP.

PROP. X. Theorema.

El radio es medio proporcional entre el seno segundo de un arco, y la Secante primera del mismo arco; y entre el seno primero, y Secante segunda; y entre la tangente primera, y segunda del mismo arco. (fig. 1.)

D*emonstr.* Por ser EC paralela à BH, serà (2. 6.) como el seno segundo IC, ò su igual AE, al radio AB; assi el radio AC, à la secante AH. De la misma suerte el seno primero EC, ò AI, su igual, es al radio AF, como el radio AC, à la secante AL. Assimismo es la tangente primera BH, al radio BA, como el radio AF, à la tangente segunda FL: luego el radio es medio proporcional entre los terminos arriba dichos.

Coligese de aqui, que sabido el seno primero, y segundo de un arco, se sabràn las secantes primera, y segunda del mismo arco, formando una regla de tres: como el seno segundo del radio, assi el radio à la secante primera de dicho arco; y tambien, como el seno primero de un arco al radio, assi el radio à la secante segunda. Y con esto, y lo dicho en la prop. passada, se formaràn las tablas de las tangentes, y secantes.

LIBRO II.

DE LOS LOGARITHMOS.

LA resolucion de los triangulos, que es el unico fin de la Trigonometria, se executa por la regla de tres, tomando del Canon Trigonometrico los senos, ò tangentes de los terminos conocidos, y multiplicando el segundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero. Estas operaciones no pueden dexar de ser muy cansadas, por exercitarse en numeros tan crecidos: con todo esso usaron de ellas los Mathematicos, hasta que hallados los Logarithmos por D. Juan Nepero, y perficionados por Enrique Brixio, y Adriano Ulac, se introduxeron en el canon trigonometrico, en lugar de los numeros sobredichos, con lo que se facilitaron en gran manera las operaciones: porque sola la suma de los Logarithmos, hace lo que en los otros numeros hacia la multiplicacion; y la resta, lo que la particion: lo qual, no solo evita la prolixidad, si que assegura mas el acierto. La naturaleza, propiedades, fabrica, y uso de los Logarithmos, serà la materia de este libro.

DEFINICION UNICA.

L*ogarithmos son unos numeros artificiales, que proceden en progression Arithmetica, substituidos, y correspondientes à otros, que proceden en progression Geometrica.*

Explicacion. Sea la serie A, compuesta de numeros geometricamente proporcionales, que procedan en qualquiera proporcion: à su lado haya otra serie de otros tantos numeros arithmeticamente proporcionales; esto es, que se excedan en igual excesso qualquiera que sea, como en la serie B, que se exceden en la unidad; ò en la serie C, que se exceden en 2. ò en la D en 3. &c. Los numeros de qualquiera de las progressiones B, C, D, &c. son logarithmos de los que componen la serie geometrica A, cada uno de su correspondiente: como el 6. de la serie B, es logarithmo del 32. y assimismo el 12. de la serie C, y el 16. de la D, son tambien logarithmos del 32. y assi de los demàs.

De aqui se colige poderse escoger para logarithmos qualquiera progression arithmetica; como tambien para numeros geometricos se puede elegir qualquiera serie geometrica, pero no con igual conveniencia, como se verà despues.

A.	B.	C.	D.
1	1	2	1
2	2	4	4
4	3	6	7
8	4	8	10
16	5	10	13
32	6	12	16
64	7	14	19

CA-