PROP. X. Theorema.

El radio es medio proporcional entre el ſeno ſegundo de un arco, y la Secante primera del miſmo arco; y entre el ſeno primero, y Secante ſegunda; y entre la tangente primera, y ſegunda del miſmo arco. (fig. 1.)

DEmonſtr. Por ſer EC paralela à BH, ſerà (2. 6.) como el ſeno ſegundo IC, ò ſu igual AE, al radio AB; aſsi el radio AC, à la ſecante AH. De la miſma ſuerte el ſeno primero EC, ò AI, ſu igual, es al radio AF, como el radio AC, à la ſecante AL. Aſsimiſmo es la tangente primera BH, al radio BA, como el radio AF, à la tangente ſegunda FL: luego el radio es medio proporcional entre los terminos arriba dichos.

Coligeſe de aqui, que ſabido el ſeno primero, y ſegundo de un arco, ſe ſabràn las ſecantes primera, y ſegunda del miſmo arco, formando una regla de tres: como el ſeno ſegundo del radio, aſsi el radio à la ſecante primera de dicho arco; y tambien, como el ſeno primero de un arco al radio, aſsi el radio à la ſecante ſegunda. Y con eſto, y lo dicho en la prop. paſſada, ſe formaràn las tablas de las tangentes, y ſecàntes.

LIBRO II.

DE LOS LOGARITHMOS.

LA reſolucion de los triangulos, que es el unico fin de la Trigonometria, ſe executa por la regla de tres, tomando del Canon Trigonometrico los ſenos, ò tangentes de los terminos conocidos, y multiplicando el ſegundo por el tercero, y partiendo el producto por el primero. Eſtas operaciones no pueden dexar de ſer muy canſadas, por exercitarſe en numeros tan crecidos: con todo eſſo uſaron de ellas los Mathematicos, haſta que hallados los Logarithmos por D. Juan Nepero, y perficionados por Enrique Brixio, y Adriano Ulac, ſe introduxeron en el canon trigonometrico, en lugar de los numeros ſobredichos, con lo que ſe facilitaron en gran manera las operaciones: porque ſola la ſuma de los Logarithmos, hace lo que en los otros numeros hacia la multiplicacion; y la reſta, lo que la particion: lo qual, no ſolo evita la prolixidad, ſi que aſſegura mas el acierto. La naturaleza, propiedades, fabrica, y uſo de los Logarithmos, ſerà la materia de eſte libro.

DEFINICION UNICA.

LOgarithmos *ſon unos numeros artificiales, que proceden en progreſsion Arithmetica, ſubſtituidos, y correſpondientes à otros, que proceden en progreſsion Geometrica.*

Explicacion. Sea la ſerie A, compueſta de numeros geometricamente proporcionales, que procedan en qualquiera proporcion: à ſu lado haya otra ſerie de otros tantos numeros arithmeticamente proporcionales; eſto es, que ſe excedan en igual exceſſo qualquiera que ſea, como en la ſerie B, que ſe exceden en la unidad; ò en la ſerie C, que ſe exceden en 2. ò en la D en 3. &c. Los numeros de qualquiera de las progreſsiones B, C, D, &c. ſon logarithmos de los que componen la ſerie geometrica A, cada uno de ſu correſpondiente: como el 6. de la ſerie B, es logarithmo del 32. y aſsimiſmo el 12. de la ſerie C, y el 16. de la D, ſon tambien logarithmos del 32. y aſsi de los demàs.

De aqui ſe colige poderſe eſcoger para logarithmos qualquiera progreſsion arithmetica; como tambien para numeros geometricos ſe puede elegir qualquiera ſerie geometrica, pero no con igual conveniencia, como ſe verà deſpues.

A.	B.	C.	D.
1	1	2	1
2	2	4	4
4	3	6	7
8	4	8	10
16	5	10	13
32	6	12	16
64	7	14	19

CA-

CAPITULO I.

DE LA NATURALEZA, Y PROPIEDADES DE LOS *Logarithmos.*

La naturaleza, y propiedades de los logarithmos, ſe funda en las propiedades de las progreſsiones arithmetica, y geometrica, como ſe verà en las propoſiciones ſiguientes.

PROP. I. Theorema.

En qualquiera progreſsion Arithmetica, la ſuma del primero, y ultimo termino, es igual à la ſuma de otros qualeſquiera dos terminos igualmente diſtantes de los extremos; y es dupla del termino medio.

Explicaſe en la ſiguiente progreſsion arithmetica.
4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
La ſuma de 4. y 20. que ſon los extremos, es 24. Digo, que tambien la ſuma de 6. y 18. la de 8. y 16. la de 10. y 14. y el duplo de 12. termino medio, ha de ſer 24. como queda demonſtrado en la Arithm. Infer. *lib.* 5. *prop.* 2. *y* 3.

COROLARIOS.

1 *De lo dicho ſe colige, que las ſumas de qualeſquiera dos terminos, igualmente diſtantes de los extremos, ſon iguales entre sì; y al duplo del termino que eſtà en medio; porque ſiendo todas iguales à la ſuma de los extremos, lo han de ſer tambien entre sì.*

2 *En quatro cantidades arithmeticamente proporcionales, aunque no ſean continuas, la ſuma de la primera, y quarta, es igual à la ſuma de la ſegunda, y tercera; conque ſi de la ſuma de la ſegunda, y tercera ſe quita la primera, el reſiduo ſerà la cantidad quarta. Exemplo. Sean las quatro cantidades arithmeticamente proporcionales 4. 6. :: 18. 20. la ſuma de 6. y 18. es 24. como tambien la ſuma de 4. y 20. y ſi de 24. ſe quita el 4. quedan 20. que es el quarto termino. Conſta de lo dicho.*

3 *En tres cantidades arithmeticamente proporcionales, la ſuma de la primera, y tercera, es igual al duplo de la ſegunda: conque ſi del duplo de la ſegunda ſe quita la primera, reſtarà la tercera, como tambien ſe colige de lo dicho.*

PROP. II. Theorema.

En qualquiera progreſsion Geometrica, el producto del primero, y ultimo termino, es igual al producto de qualeſquiera otros dos terminos igualmente diſtantes de los extremos, y al producto del termino medio por sì miſmo.

Explicaſe en la ſiguiente progreſsion geometrica.
3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768.
El producto de 3. por 768. que ſon los extremos, es 2304. Digo, que tambien el producto de 6. por 384. y el de 12. por 192. &c. ſerà 2304. y el miſmo ſaldrà multiplicando 48. que es el termino que eſtà en medio, por sì miſmo. Queda demonſtrado en la Arithm. Infer. *lib.* 5. *prop.* 21. *y* 22.

COROLARIOS.

1 *De lo dicho ſe infiere, que los productos de los terminos igualmente diſtantes de los extremos, ſon iguales entre sì, como tambien al producto del termino medio por sì miſmo, por ſer todos iguales al producto de los extremos.*

2 *En quatro cantidades geometricamente proporcionales, el producto de la primera, y quarta, es igual al producto de la ſegunda, y tercera; y por conſiguiente, ſi el producto de la ſegunda, y tercera ſe parte por la primera, el quociente ſerà la cantidad quarta. Conſta de lo dicho, y ſe demonſtrò en la Arithm. Infer. lib. 4. prop. 2. y 4.*

3 *En tres cantidades geometricamente proporcionales, el producto de la primera, y tercera, es igual al producto de la ſegunda por sì miſma: conque ſi eſte producto ſe parte por la primera, ſaldrà en el quociente la cantidad tercera. Conſta tambien de lo dicho, y ſe demonſtrò en la Arithm. Infer. lib. 4. prop. 3. y 4.*

PROP. III. Theorema.

En quatro numeros geometricamente proporcionales, la ſuma de los Logarithmos correſpondientes à los medios, es igual à la ſuma de los Logarithmos correſpondientes à los extremos.

Los quatro numeros A. B. C. D. ſean geometricamente proporcionales, ſea, o no ſea ſu proporcion continua: y ſean E. F. G. H. los logarithmos correſpondientes à los ſobredichos numeros. Digo, que la ſuma de F. y G. que ſon logarithmos de los medios, es igual à la ſuma de E. y H. que lo ſon de los extremos.

A.	B. ::	C.	D.
4.	6. ::	8.	12.
2.	3.	4.	5.
E.	F.	G.	H.

Demonſtr. Los logarithmos ſon unos numeros arithmeticamente proporcionales ſubſtituidos, y correſpondientes à los geometricos; pero en los numeros arithmeticamente proporcionales, la ſuma de los medios es igual à la de los extremos: (*Corolar. 2. prop. 1.*) luego lo miſmo ſerà en los ſobredichos logarithmos.

COROLARIO.

De lo dicho ſe ſigue, que ſi de la ſuma de los logarithmos medios F, y G, ſe quita el primero E, el reſiduo ſerà el logarithmo H, del quarto termino.

PROP. IV. Theorema.

En tres numeros geometricamente proporcionales, el duplo del logarithmo correſpondiente al medio, es igual à la ſuma de los logarithmos correſpondientes à los extremos.

Demonſtr. Los logarithmos ſon numeros arithmeticamente proporcionales, ſubſtituidos por los geometricamente proporcionales: pero (*corolar. 3. prop. 1.*) en los numeros arithmeticamente proporcionales, el duplo del

del medio es igual à la ſuma de los extremos: luego tambien en los logarithmos ſobredichos.

COROLARIO.

En tres numeros geometricamente proporcionales, ſi del duplo del logarithmo del medio ſe quita el logarithmo del primero, el reſiduo ſerà el logarithmo del quarto.

PROP. V. Theorema.

Si multiplicandoſe dos numeros, produxeren otro numero, la ſuma de los logarithmos de los numeros multiplicados, ſerà igual à la ſuma del logarithmo del producto, y del logarithmo de la unidad.

Explicacion. Los dos numeros A, y B, multiplicandoſe entre sì, producen al numero C. Digo, que la ſuma de los logarithmos de A, y B, es igual à la ſuma del logarithmo de C, y del logarithmo de la unidad. Añadaſe antes la unidad D.

D.	A.	B.	C.
1.	4.	6.	24.

Demonſtr. Como ſe dixo en la *Arith. Infer. lib. 1. cap. 6.* el producto C incluye tantas veces al numero B, quantas el numero A incluye la unidad D: luego ſon proporcionales D à A, como B à C: luego los logarithmos de A, y B ſumados, ſon iguales à la ſuma de los logarithmos de los extremos, eſto es, al logarithmo de la unidad D, y al de C juntos.

COROLARIO.

De lo dicho ſe infiere, que ſi en una ſerie de logarithmos, el logarithmo de la unidad fuere zero, la ſuma de los logarithmos correſpondientes à los numeros multiplicados, ſerà igual al logarithmo del producto; y por conſiguiente, la ſuma ſola equivaldrà à la multiplicacion de los numeros geometricos. La razon es, porque, como hemos demonſtrado, la ſuma de los logarithmos de los numeros multiplicados es igual al logarithmo del producto, y al de la unidad: luego ſiendo eſte logarithmo zero, ſerà dicha ſuma igual al logarithmo del producto. Lo que no ſucederà ſiendo numero el logarithmo de la unidad, porque ſerà meneſter reſtarle de la ſuma de los logarithmos de los multiplicados, para tener el loga-

rithmo del producto. Por la misma razon la resta sola de estos logarithmos, equivaldrà à la particion.

PROP. VI. Theorema.

Si un numero se multiplica por sì mismo, el duplo de su logarithmo serà igual à la suma del logarithmo del producto, ò quadrado, y del logarithmo de la unidad.

Explicacion. El numero S, multiplicandose por sì mismo, produce á su quadrado M. Digo, que el logarithmo de S, duplicado, serà igual à la suma del logarithmo de M, y del logarithmo de la unidad. Añadase antes la unidad N.

N.	S.	M.
1.	4.	16.

Demonstr. Segun lo dicho en la *Arith. Infer. lib.* 1. *cap.* 6. el producto M incluye al numero S tantas veces, quantas el numero S incluye la unidad: luego son proporcionales N à S, como S à M: luego (4.) el duplo del logarithmo de S, es igual à la suma de los logarithmos de N. y M.

COROLARIO.

De lo dicho se infiere, que si en una serie de logarithmos, el logarithmo de la unidad fuere el zero, el logarithmo de la raiz duplicado, serà el logarithmo del quadrado; y la mitad de este logarithmo, serà el logarithmo de la raiz, por la razon dicha en el corol. de la propos. passada: lo que no podrà ser, siendo numero el logarithmo de la unidad; porque para tener el logarithmo del quadrado, se havrà de restar el logarithmo de la unidad, del duplo del logarithmo de la raiz: como para hallar el logarithmo de la raiz, se havrà de añadir al logarithmo del quadrado, el logarithmo de la unidad; y la mitad de esta suma serà el logarithmo de la raiz.

PROP. VII. Theorema.

El Logarithmo de la raiz triplicado, es igual al Logarithmo del cubo, y al duplo Logarithmo de la unidad.

Explicacion. Sea la raiz S, y su cubo sea Q. Digo, que el logarithmo de S, triplicado, es igual al logarithmo del cubo Q, y al logarithmo de la unidad duplicado. Sea

N.	S.	M.	Q.
1.	4.	16.	64.

M el quadrado de S; y añadase antes la unidad N.

Demonstr. La raiz S, multiplicando al quadrado M, produce al cubo Q: luego (5.) la suma de los logarithmos de S, y M, es igual à la suma de los logarithmos de N, y Q. Y siendo (6.) el logarithmo de M, con el logarithmo de N, igual à dos veces el logarithmo de S, seràn el logarithmo de S, juntamente con el de M, y el de la unidad N, iguales à tres logarithmos de S: luego tres logarithmos de S, son iguales à los logarithmos de S, y M, y à un logarithmo de la unidad N; pero los logarithmos de S, y M, son iguales à los logarithmos de N, y Q: luego tres logarithmos de S son iguales à los logarithmos de N, y Q, mas un logarithmo de N: luego el triplo del logarithmo de la raiz S, es igual al logarithmo del cubo Q, y à dos logarithmos de la unidad N.

COROLARIOS.

1 *Si en una serie de logarithmos, el de la unidad fuere zero, el logarithmo del cubo es justamente el triplo del logarithmo de la raiz; y el tercio de el logarithmo del cubo, serà el logarithmo de la raiz: lo que no podrà ser, si el logarithmo de la unidad fuere numero, como consta de lo dicho.*

2 *El quadruplo del logarithmo de la raiz, juntamente con el triplo del logarithmo de la unidad, serà el logarithmo del quadrado-quadrado, ò quarta potestad; y assi consiguientemente de las demàs potestades infinitamente: y si el logarithmo de la unidad fuere zero, solo el quadruplo logarithmo de la raiz serà el del quadrado-quadrado; y el quintuplo del logarithmo de la raiz serà el de la quinta potestad; y assi de las demàs.*

PROP. VIII. Theorema.

Explicanse las especies de Logarithmos.

Los logarithmos pueden ser *directos*, ò *retrogrados*. *Directos*, son los que siguen el mismo tenor, y orden de los terminos geometricos à quien corresponden; esto es, que crecen, y se aumentan quando crecen los terminos de la progression geometrica. *Retrogrados*, son los que no guar-

guardan el orden de los terminos geometricos, si que quando èstos se aumentan, los logarithmos se disminuyen; y al contrario: conque si à una progresion geometrica, cuyos terminos se van aumentando, le corresponde otra progresion arithmetica, que tambien se va aumentando, los terminos de esta progresion seràn logarithmos directos; pero si esta progresion arithmetica fuere decrecente, de suerte, que sus terminos se vayan disminuyendo, quando los de la geometrica se van aumentando, sus terminos seràn logarithmos retrogrados.

PROP. IX. Theorema.

Determinase qual de estas dos especies de Logarithmos sea la mejor.

Digo ser indubitable, que los logarithmos directos son mejores, y mas apreciables que los retrogrados: porque es cierto, que la serie de los terminos geometricos puede aumentarse infinitamente; y haviendo de ir acompañando la serie de los logarithmos à la de los geometricos, siendo èstos retrogrados, havràn de irse disminuyendo, y decreciendo infinitamente: de que se sigue llegarà à disminuirse de suerte, que sus terminos seràn menos que nada, ò menos que el zero, y se havràn de expressar con este señal —, que significa *menos*, como dixe en el tratado de la Algebra, donde les dimos el nombre de *numeros falsos*, ò *negativos*.

De aqui se sigue, que aunque estos logarithmos tengan las mismas propiedades que se han demonstrado en las proposiciones passadas; pero son mas dificultosas, y expuestas à error las operaciones que con ellos se exercitan: porque no dexa de causar dificultad, singularmente à los poco exercitados en la logistica de la Algebra, el sumar, y restar los terminos que llevan los signos +, y —, donde es facil equivocar la suma con la resta: por lo que juzgan comunmente los Autores, no ser conveniente usar de estos logarithmos retrogrados, ni aplicarles al canon trigonometrico. Llegò à reconocer este inconveniente Don Juan Nepe-

pero despues de haver trabajado sus Tablas con logarithmos retrogrados, el qual por hallarse ya en edad cansada, no se pudo aplicar à trabajarles de nuevo: lo que executaron despues Enrique Brixio, y Adriano Ulac, con acceptacion comun de los Mathematicos.

PROP. X. Theorema.

De las progresiones Geometricas, la mejor para el intento presente, es la que empieza por la unidad, y continùa sus terminos en proporcion decupla; y de las progresiones Arithmeticas, la que empieza por el zero, y sus terminos se exceden en la unidad, y algunos zeros.

Haviendo determinado en la proposicion passada què progresiones sean mejores para este intento, en quanto à la especie, conviene determinar aora las mas proporcionadas en quanto al individuo. Digo pues lo primero, que de infinitas progresiones geometricas, que se pueden elegir para el caso presente, la mejor es la que tiene por primer termino la unidad; y de las arithmeticas, la que empieza por el zero. La razon es, porque como consta del corolar. de la *propos.* 5. en solas estas progresiones equivale la suma sola à la multiplicacion, y la resta sola à la particion, por la razon alli dicha: luego con estos logarithmos seràn mas faciles, y breves las operaciones.

Digo lo segundo, que de las infinitas progresiones geometricas, que empiezan de la unidad, es mejor la que procede en proporcion decupla de sus terminos, como 1. 10. 100. &c. y de las infinitas arithmeticas, que proceden del zero, la mejor de todas para el intento es aquella, cuyos terminos se van excediendo en la unidad, y algunos zeros: la razon es la mayor sencillèz, y claridad que consigo llevan estas progresiones. Añadense à la Arithmetica los zeros, para que proporcionalmente se puedan hallar los logarithmos correspondientes à los terminos intermedios de la progresion geometrica.

Ex-

Explicome en las dos progresiones arithmetica, y geometrica siguientes.

Progress. Geometr.	*Terminos.*	*Progress. Arithm.*
1	1	0.00000000
10	2	1.00000000
100	3	2.00000000
1000	4	3.00000000
10000	5	4.00000000
100000	6	5.00000000
1000000	7	6.00000000
10000000	8	7.00000000
100000000	9	8.00000000
1000000000	10	9.00000000
10000000000	11	10.00000000

Dispuesta la progresion geometrica en decupla proporcion, como se vè, se pone à su lado la progresion arithmetica natural, desde el primer termino, que es el zero, en los numeros que vàn separados de las otras cifras con un punto; y se añaden à cada uno ocho zeros, conque el excesso de cada termino à su inmediato es cien millones. Formase esta progresion con tanto excesso entre sus terminos; porque como 0.000.&c. sea logarithmo de 1. primer termino de la progresion geometrica; y 1. 000. &c. sea logarithmo del segundo termino, que es 10. y entre 1. y 10. falten ocho terminos, à quienes tambien se les ha de señalar proporcionalmente su logarithmo en las tablas, es menester que la diferencia del logarithmo 0. 000. &c. y el logarithmo 1. 000. &c. sea muy grande, para que sin error sensible se puedan hallar los ocho logarithmos intermedios, como se verà despues en la fabrica de estos numeros.

La sobredicha cifra, que està distinguida de las demàs con un punto, se llama *caracteristica*, por ser el caracter, ò señal que denota quantas cifras tiene el numero geometrico correspondiente à dicho logarithmo; porque siempre tiene dicho numero una cifra mas de lo que expressa la

la caracteristica de su logarithmo. La razon es, porque todos los logarithmos que hay entre el primero, y segundo de la tabla precedente, tienen la caracteristica zero; y los terminos absolutos sus correspondientes, son los numeros que hay entre 1. y 10. que constan de una sola cifra. Asimismo los logarithmos que hay entre el segundo, y tercero, tienen la caracteristica 1. y los terminos absolutos à que corresponden, son los contenidos entre 10. y 100. que constan de dos cifras, y asi de los demàs. Sea pues regla general, que *tantas cifras hay en un numero absoluto, quantas unidades hay en la caracteristica de su logarithmo, y mas una.*

CAPITULO II.

DE LA FABRICA DE LOS LOGARITHMOS.

CON las reglas que se contienen en las proposiciones siguientes, se fabrìca la tabla logarithmica de los numeros absolutos; y como para esto se haya hecho eleccion de las dos progresiones, una geometrica, que empezando de la unidad, procede en proporcion decupla; y otra arithmetica, que empezando del zero, se exceden sus terminos en la unidad con igual numero de zeros, explicarè las reglas contrahidas à esta especie de logarithmos, que son los admitidos; y de ellas se podrà colegir facilmente, como se deva proceder en los de otras especies.

PROP. XI. Problema.

Dado el Logarithmo del primer termino, y el del segundo de una progresion Geometrica, hallar los Logarithmos de los demàs terminos de dicha progresion.

EN qualquiera especie de logarithmos, dado el del primero, y el del segundo termino, se hallaràn los demàs en esta forma. Restese el menor del mayor, y se tendrà su