Explicome en las dos progresiones arithmetica, y geometrica siguientes.

Progress. Geometr.	*Terminos.*	*Progress. Arithm.*
1	1	0.00000000
10	2	1.00000000
100	3	2.00000000
1000	4	3.00000000
10000	5	4.00000000
100000	6	5.00000000
1000000	7	6.00000000
10000000	8	7.00000000
100000000	9	8.00000000
1000000000	10	9.00000000
10000000000	11	10.00000000

Dispuesta la progresion geometrica en decupla proporcion, como se vè, se pone à su lado la progresion arithmetica natural, desde el primer termino, que es el zero, en los numeros que vàn separados de las otras cifras con un punto; y se añaden à cada uno ocho zeros, conque el excesso de cada termino à su inmediato es cien millones. Formase esta progresion con tanto excesso entre sus terminos; porque como 0.000.&c. sea logarithmo de 1. primer termino de la progresion geometrica; y 1. 000. &c. sea logarithmo del segundo termino, que es 10. y entre 1. y 10. falten ocho terminos, à quienes tambien se les ha de señalar proporcionalmente su logarithmo en las tablas, es menester que la diferencia del logarithmo 0. 000. &c. y el logarithmo 1. 000. &c. sea muy grande, para que sin error sensible se puedan hallar los ocho logarithmos intermedios, como se verà despues en la fabrica de estos numeros.

La sobredicha cifra, que està distinguida de las demàs con un punto, se llama *caracteristica*, por ser el caracter, ò señal que denota quantas cifras tiene el numero geometrico correspondiente à dicho logarithmo; porque siempre tiene dicho numero una cifra mas de lo que expressa la

la caracteristica de su logarithmo. La razon es, porque todos los logarithmos que hay entre el primero, y segundo de la tabla precedente, tienen la caracteristica zero; y los terminos absolutos sus correspondientes, son los numeros que hay entre 1. y 10. que constan de una sola cifra. Asimismo los logarithmos que hay entre el segundo, y tercero, tienen la caracteristica 1. y los terminos absolutos à que corresponden, son los contenidos entre 10. y 100. que constan de dos cifras, y asi de los demàs. Sea pues regla general, que *tantas cifras hay en un numero absoluto, quantas unidades hay en la caracteristica de su logarithmo, y mas una.*

CAPITULO II.

DE LA FABRICA DE LOS LOGARITHMOS.

CON las reglas que se contienen en las proposiciones siguientes, se fabrìca la tabla logarithmica de los numeros absolutos; y como para esto se haya hecho eleccion de las dos progresiones, una geometrica, que empezando de la unidad, procede en proporcion decupla; y otra arithmetica, que empezando del zero, se exceden sus terminos en la unidad con igual numero de zeros, explicarè las reglas contrahidas à esta especie de logarithmos, que son los admitidos; y de ellas se podrà colegir facilmente, como se deva proceder en los de otras especies.

PROP. XI. Problema.

Dado el Logarithmo del primer termino, y el del segundo de una progresion Geometrica, hallar los Logarithmos de los demàs terminos de dicha progresion.

EN qualquiera especie de logarithmos, dado el del primero, y el del segundo termino, se hallaràn los demàs en esta forma. Restese el menor del mayor, y se tendrà su ſu diferencia, ſupueſto que ſean directos: añadaſe èſta al ſegundo logarithmo, y ſe tendrà el tercero: añadaſe la miſma diferencia al tercero, y ſe tendrà el quarto; y aſsi infinitamente. La razon es, por proceder todos con diferencias, ò exceſſos iguales.

De aqui ſe colige, que en nueſtros logarithmos, por ſer el primero todo zeros, no es meneſter reſtarle del ſegundo; y aſsi, el miſmo logarithmo ſegundo, es el exceſſo en que todos ſe vàn excediendo: dupliqueſe pues el logarithmo del 10. que es el termino ſegundo, y ſe tendrà el logarithmo del termino ſiguiente, que es 100. ſumenſe el del 10. y el del 100. y ſe tendrà el de 1000. ſumenſe el de 10. y el de 1000. y ſe tendrà el de 10000. y aſsi infinitamente.

PROP. XII. Problema.

En qualquiera ſerie de numeros geometricamente proporcionales, dados los Logarithmos del primero, y ultimo terminos, hallar los Logarithmos de los intermedios.

EN qualquiera eſpecie de logarithmos, conocido el primero, y el ultimo, y el numero de ſus terminos, ſe ſabràn los logarithmos intermedios de eſte modo: Reſteſe el menor del mayor, eſto es, ſupueſto que ſon directos, reſteſe el primero del ultimo: partaſe el reſiduo por el numero de los terminos, menos uno; y el quociente ſerà la diferencia de qualquiera à ſu inmediato, que añadida al primero, darà el logarithmo ſegundo; y añadida à èſte, darà el tercero, &c. Queda demonſtrado en la *propoſ.* 8. *lib.* 5. de la *Arithm. Infer.* De aqui ſe ſigue, que en nueſtros logarithmos, por ſer el primero todo zeros, no es meneſter reſtarle del ultimo, ſi que baſtarà partir el ultimo termino por el numero de los terminos menos uno, y el quociente ſerà el logarithmo ſegundo, que juntamente es el exceſſo en que todos proceden: luego duplicandole ſe tendrà el tercero; y ſumando ſegundo, y tercero, ſe tendrà el quarto, &c. como por exemplo en las progreſſiones de la *propoſ.* 10. dado el logarithmo de 1. y el de 10-

10000000000. que es 10. 00000000. ſe piden los intermedios: el numero de los terminos es 11. y quitando 1. es 10. parto pues el logarithmo 10. 00000000. por 10. y el quociente 1. 00000000. ſerà el logarithmo del termino ſegundo, que duplicado dà el tercero; y el ſegundo, y tercero ſumados, dàn el quarto; y aſsi de los demàs.

PROP. XIII. Problema.

Dados los Logarithmos de dos, ò mas numeros, hallar el Logarithmo del producto de dichos numeros; y aſsimiſmo, hallar el Logarithmo del quociente de la particion del uno por el otro.

SUmenſe los logarithmos de los numeros dados, y la ſuma ſerà el logarithmo del producto de dichos numeros. Conſta del *corolar.* de la *propoſ.* 5. *Exemplo.* Sumenſe los logarithmos de los numeros 10. y 100. que eſtàn en la tabla de la *propoſ.* 10. y la ſuma ſerà el logarithmo de 1000. que es el producto de 10. por 100. Aſsimiſmo, reſteſe el logarithmo de 10. del logarithmo de 1000. y el reſiduo ſerà el logarithmo de 100. por la razon ſobredicha.

PROP. XIV. Problema.

Hallar los Logarithmos de las poteſtades, y raices numericas.

MUltiplicando un numero por sì miſmo, nace ſu quadrado: multiplicando el quadrado por el numero miſmo ſale el cubo: multiplicando el cubo por el miſmo numero, ſale el quadrado-quadrado; y aſsi infinitamente: luego, porque la ſuma de eſtos logarithmos equivale à la multiplicacion, ſi ſe ſuma dos veces el logarithmo de un numero, ſaldrà el logarithmo de ſu quadrado; y ſi ſe ſuma tres veces, ſaldrà el logarithmo de ſu cubo; y ſi quatro veces, ſaldrà el de ſu quadrado-quadrado; y aſsi de los demàs: luego al contrario, ſi el logarithmo del quadrado ſe parte por 2. ò ſe le reſta la mitad, ſaldrà el logarithmo de la raiz quadrada de aquel nu-

numero; y si el logarithmo del cubo se parte por 3. esto es, se toma su tercio, se sabrà el logarithmo de la raiz cubica; y assi en las demàs potestades, y raices.

PROP. XV. Problema.

Dados los Logarithmos de dos numeros, hallar el Logarithmo del medio proporcional entre dichos numeros.

BUscase, por exemplo, el logarithmo del medio proporcional entre el tercero, y quinto termino de la tabla antecedente, *propos.* 10. *Operacion.* Sumense los logarithmos del tercero, y quinto terminos, y la mitad de la suma serà el logarithmo del numero, que es medio proporcional entre los sobredichos.

Demonstr. El medio proporcional entre dos numeros se halla, multiplicando dichos numeros, y sacando la raiz quadrada del producto, como dixe en la *Arithm. Super. lib.3. prop.1.* luego, porque en estos logarithmos la suma equivale à la multiplicacion, la suma de los logarithmos de los numeros dados, serà el logarithmo de su producto, y (14) su mitad serà el logarithmo de la raiz quadrada de dicho producto; y por consiguiente, del medio proporcional que se pretende. *De que se colige, que el medio arithmetico entre los logarithmos de dos numeros, es logarithmo del medio geometrico que hay entre dichos numeros.*

PROP. XVI. Problema.

Dados los Logarithmos de todos los terminos de una progression geometrica, hallar los Logarithmos de los numeros comprehendidos entre cada termino de dicha progression, y su inmediato.

MUcho devemos à Enrique Brixio, y à Adriano Ulac, por havernos dexado trabajadas las tablas logarithmicas, pues sin la fatiga de su fabrica, nos facilitaron las operaciones trigonometricas: suponiendo pues que nadie ha de gastar inutilmente el tiempo en trabajarlas de nuevo, explicarè con brevedad en la *propos.* siguiente

te la methodo que observaron en su construccion, para lo qual solo nos falta saber el modo de hallar los logarithmos de los numeros que hay entre uno, y otro termino de la progression geometrica, de los quales se necessita para innumerables operaciones; de suerte, qua sin ellos serìa casi inutil la tabla logarithmica, como luego veremos: y porque con la misma methodo, con que se halla uno de estos logarithmos, se pueden hallar los demàs, bastarà explicarla en uno de ellos, y sea por exemplo el del numero 9.

Operacion. Lo primero, porque el 9. se halla entre los dos primeros terminos de la progression geometrica, que son 1. y 10. y el artificio para hallar su logarithmo, consiste en inquirir successivamente diferentes medios geometricos, y otros tantos arithmeticos; para que las operaciones salgan bien exactas, y no sea sensible lo que se pierde en la extraccion de raices regularmente irracionales, se añadiràn à los dichos terminos 1. y 10. tantos zeros à lo menos, quantos lleva el logarithmo del numero 10. en la tabla precedente, los quales serviràn solamente para la extraccion de los medios proporcionales, y se borraràn despues de acabada la operacion: en la formula siguiente solo se añaden siete, por ser èstos los bastantes para la explicacion.

	Proporcional.	Logarithm.
$\overline{A}$	1.0000000	0.00000000
C	3.6122777	0.50000000
B	10.0000000	1.00000000
$\overline{B}$	10.0000000	1.00000000
D	5.6234132	0.75000000
C	3.1622777	0.50000000
$\overline{B}$	10.0000000	1.00000000
E	7.4989421	0.87500000
D	5.6234132	0.75000000
$\overline{B}$	10.0000000	1.00000000
F	8.6596432	0.93750000
E	7.4989421	0.87500000

2 Entre la unidad A, y el 10. B, aumentados con sus zeros, hallese el medio geometrico proporcional C: y porque aqui se busca el num. 9. con tantas cifras como tiene la unidad; esto es, 9. 0000000. ò otro el proximo menor, que por este camino se le puede hallar, siendo el num. C, menor que el que

	Proporcion.	Logarithm.
$\overline{B}$	10.0000000	1.00000000
G	9.3057204	0.96875000
F	8.6596432	0.93750000
$\overline{G}$	9.3057204	0.96875000
H	8.9768713	0.95312500
F	8.6596432	0.93750000
$\overline{G}$	9.3057204	0.96875000
I	9.1398170	0.96093750
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{I}$	9.1398170	0.96093750
K	9.0579777	0.95703125
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{K}$	9.0579777	0.95703125
L	9.0173333	0.95507812
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{L}$	9.0173333	0.95507812
M	8.9970796	0.95410156
H	8.9768713	0.95312500
$\overline{L}$	9.0173333	0.95507812
N	9.0072008	0.95458984
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{N}$	9.0072008	0.95458984
O	9.0021388	0.95434570
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{O}$	9.0021388	0.95434570
P	8.9996088	0.95422363
M	8.9970796	0.95410156
$\overline{O}$	9.0021388	0.95434570
Q	9.0008737	0.95428467
P	8.9996088	0.95422363
$\overline{Q}$	9.0008737	0.95428467
R	9.0002412	0.95425415
P	8.9996088	0.95422363
$\overline{R}$	9.0002412	0.95425415
S	8.9999250	0.95423889
P	8.9996088	0.95422363

que se busca, es cierto, que entre el numero C, y el numero B, estarà el que se desea. Busquese pues entre B, y C, el medio proporcional D; y porque tambien es menor que 9. 0000000. entre el mismo B, y D, se hallarà el medio proporcional E, que aunque se va acercando al nu. 9.0000000. pero aun es mucho menor que èl. Busquese pues otro medio entre B, y E, y serà F, que aun es menor que 9. 0000000. por lo qual se hallarà otro medio proporcional entre B, y F, que serà G; el qual es ya mayor que el 9. 0000000. por lo qual entre G, y el proximo menor F, se hallarà otro medio proporcional H, que es menor que 9. 0000000. y assi entre H, y G, que es el proximo mayor, se buscarà otro medio proporcional I, que es mayor que 9. 0000000. pero no con tanto excesso como lo era el numero G, por lo qual entre I, y H, proximo menor, se hallarà el

me-

medio proporcional K; y de esta suerte se irà continuando la operacion, buscando siempre un medio geometricamẽte proporcional entre el medio proximo mayor, y el proximo menor de los que se van hallando, hasta encontrar con el numero 9. 0000000. ò otro tan proximo, que casi no se diferencie de èl. Viene pues à salir despues de haver hallado 25. medios geometricos el numero 9. 0000000. como se ve en la formula de las operaciones.

	Proporcion.	Logarithm.
$\overline{R}$	9.0002412	0.95425415
T	9.0000831	0.95424652
S	8.9999250	0.95423889
$\overline{T}$	9.0000831	0.95424652
V	9.0000041	0.95424271
S	8.9999250	0.95423889
$\overline{V}$	9.0000041	0.95424271
X	8.9999650	0.95424080
S	8.9999250	0.95423889
$\overline{V}$	9.0000041	0.95424271
Y	8.9999845	0.95424217
X	8.9999650	0.95424080
$\overline{V}$	9.0000041	0.95424271
Z	8.9999943	0.95424223
Y	8.9999845	0.95424217
$\overline{V}$	9.0000041	0.95424271
&	8.9999992	0.95424247
Z	8.9999943	0.95424223
$\overline{V}$	9.0000041	0.95424271
AA	9.0000016	0.95424259
&	8.9999992	0.95424247
$\overline{AA}$	9.0000016	0.95424259
BB	9.0000004	0.95424253
&	8.9999992	0.95424247
$\overline{BB}$	9.0000004	0.95424253
CC	8.9999998	0.95424250
&	8.9999992	0.95424247
$\overline{BB}$	9.0000004	0.95424253
DD	9.0000000	0.95424251
CC	8.9999998	0.95424250

3 Hecho esto, bolviendo al principio de la formula, entre el logarithmo de A, y el logarithmo de B, se hallarà (15.) el medio arithmetico C, que es el logarithmo del medio geometrico C: luego se irà continuando la operacion, buscando siempre los medios Arithmeticos, ò Logarithmicos, correspondientes à los medios Geometricos, siguiendo el mismo orden con que èstos se fueron hallando; y en la ultima operacion se hallarà el logarithmo correspondiente al numero 9. 0000000.

0000000. que es 0. 95424251. y quitandole al dicho numero los zeros que se le añadieron, quedarà el numero 9. y su logarithmo 0. 95424251.

De la misma suerte que se ha hallado el logarithmo del numero 9. se pueden hallar los logarithmos de todos los numeros intermedios que hay entre los que componen la progression geometrica, arriba puesta; pero solo serà menester esta operacion prolixa para hallar los logarithmos de los numeros primos, que son aquellos à quien no mide otro numero, si sola la unidad; porque para los numeros compuestos, que nacen de la multiplicacion de otros, se hallaràn los logarithmos por la *prop.* 13. como luego veremos.

PROP. XVII. Problema.

Formar la Tabla Logarithmica.

DE lo dicho en las proposiciones antecedentes se colige el modo de formar la tabla logarithmica de todos los numeros, empezando de la unidad àzia el infinito, que es el siguiente.

1 Determinada la progression geometrica, que segun la *prop.* 10. es la que empieza de la unidad, y sus terminos proceden en proporcion decupla, se determina juntamente la progression arithmetica, que empezando del zero, sigue el orden natural de los numeros que se exceden en la unidad; pero añadida à cada uno igual cantidad de zeros, como se dixo en la prop. citada: y los numeros de esta progression son logarithmos de los terminos de la progression geometrica, como se ve en la tabla que puse en la *prop.* 10. sobredicha.

2 Pero porque necessitamos tambien de todos los numeros contenidos entre uno, y otro termino de la porgression geometrica, es forzoso hallarles sus logarithmos: y lo primero con la misma regla de la propos. passada, conque se hallò el logarithmo del numero 9. se hallaràn los logarithmos de los numeros primos, como son 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. &c. si bien haviendose hallado el logarithmo del numero 9. con solo tomar su mitad, se tendrà (14.) el del numero 3. que es su raiz quadrada. Haviendo pues hallado el logarithmo del 2. duplicandole, triplicandole, quadruplicandole, &c. se tendràn los logarithmos de sus potestades 4. 8. 16. 32. 64. &c. Assimismo duplicando, triplicando, &c. el logarithmo del 3. se tendràn los de sus potestades 9. 27. 81. &c. Y de la misma suerte con el logarithmo del numero 5. se tendràn los de 5. 25. 125. &c.

3 Hallados los logarithmos de los numeros *primos*, se sabràn facilmente los de los *compuestos*; porque como èstos procedan de la multiplicacion de otros numeros, si se suman los logarithmos de los numeros producentes, se hallarà el logarithmo del numero producto. (13.) Y assi, porque el 6. procede de la multiplicacion de 2. por 3. sumando los logarithmos del 2. y del 3. se tendrà el logarithmo de 6. Assimismo la suma de los logarithmos de 2. y de 4. serà el del numero 8. y assi de los demàs.

Con esto quedarà formada la tabla logarithmica, con los logarithmos de todos los numeros desde la unidad àzia el infinito. La que pongo à lo ultimo de este libro despues de la tabla trigonometrica, solo llega hasta 10000. pero mas adelante se darà regla para hallar los logarithmos de qualesquiera numeros mayores que 10000. que es el ultimo de dicha tabla.

PROP. XVIII. Problema.

Aplicacion de los logarithmos al Canon Trigonometrico.

LOs logarithmos se han aplicado al canon trigonometrico, substituyendo en lugar de los numeros geometricos que le componen, los logarithmos sus correspondientes: lo que ha facilitado en gran manera las operaciones trigonometricas. Pero se ha de advertir, que los numeros geometricos que hay en el canon, se entienden aumentados con algunas cifras, que se añadieron para mayor exaccion, segun lo que dixe en la *prop.* 16. los quales despues se quitaron; y por esta causa se hallarà, que los logarithmos substituidos en su lugar, son mayores de lo que devian ser, si se atienden los numeros geometricos, segun en el canon se expressan.

Exem-

Exemplo. El primer numero geometrico en el canon de los ſenos es 2909. que es el ſeno de un minuto ; y ſu logarithmo alli miſmo es 6. 4637261. ſiendo aſsi, que en la tabla logarithmica à 2909. le correſponde el logarithmo 3. 4637437. La razon de eſto es, porque en el canon de los ſenos el numero geometrico 2909. ſe ha de entender tiene mas tres cifras, ſegun la regla general que ſe diò à lo ultimo de la *propoſ.* 10. Y ſegun otra que daremos mas adelante, al logarithmo del ſeno de un minuto 6. 4637261. le correſponde el numero geometrico 2908882.que quitadas las tres ultimas cifras, es 2908. pero por ſer tan crecidas las que ſe han quitado, ſe pone en el canon 2909.

Aunque en el canon trigonometrico he omitido los numeros abſolutos, por ſer baſtantes para las operaciones ſus logarithmos, he querido advertir lo ſobredicho, para que quien quiſiere cotejarles con los logarithmos de la tabla logarithmica, no tropiece con la dificultad que hemos dicho.

CAPITULO III.

DEL USO DEL CANON TRIGONOMETRICO, Y TABLA *Logarithmica.*

DOs tablas ſe hallan al fin de eſte libro : la primera, es el *canon trigonometrico* : la ſegunda es, la *tabla logarithmica*, que contiene todos los numeros, deſde la unidad, haſta 10000. con los logarithmos que les correſponden : la inteligencia, y uſo de entrambas, explican las propoſiciones ſiguientes.

PROP. XIX. Theorema.

Explicaſe la diſpoſicion del Canon Trigonometrico.

LA tabla 1. ò canon trigonometrico contiene todos los grados, ò minutos haſta el quadrante : ſu diſpoſicion es la ſiguiente. En cada plana ſe hallan dos ordenes, y en cada uno tres colunas, de las quales, la primera à la izquierda del que lee, contiene los minutos del grado que eſtà arriba en la frente de aquel orden ; la ſegunda coluna lleva los ſenos logarithmicos,correſpondientes à dicho grado, y minutos; y la tercera, ſus tangentes logarithmicas ; y lo miſmo en el ſegundo orden : ſolo que en eſte, la primera coluna lleva los minutos con orden opueſto, porque en la del orden primero deſcienden,y en la del ſegundo ſuben, para que de eſta ſuerte el grado,y minutos del ſegundo orden, ſea complemento al quadrante de los del primero, y al contrario ; y ſe hallen en la miſma plana los ſenos primeros, y ſegundos de un miſmo arco, y aſsimiſmo las tangentes.

Ponenſe en el canon trigonometrico ſolamente los arcos haſta el quadrante, porque los arcos mayores que el quadrante, tienen los miſmos ſenos, y tangentes que ſus complementos al ſemicirculo, como en otra parte queda dicho, los quales ſon neceſſariamente menores que el quadrante. Ponenſe ſolamente los ſenos, y tangentes logarithmicas, eſto es, los logarithmos correſpondientes à los ſenos, y tangentes, omitiendo ſus propios numeros geometricos, porque creo, que nadie querrà valerſe de ellos, pudiendo executar con mas prontitud, y deſcanſo las miſmas operaciones con los logarithmos, que con los ſobredichos numeros geometricos. Se han omitido tambien los logarithmos de las ſecantes, aſsi por hacerſe ſin ellas con igual facilidad los calculos de los triangulos, como por poderſe hallar facilmente ſus logarithmos, como deſpues veremos. Quan facil ſea el manejo de eſtas tablas, ſe ve en las propoſiciones ſiguientes.

PROP. XX. Problema.

Dados los arcos, ò angulos haſta los minutos, hallar ſus ſenos, y tangentes logarithmicas en el Canon Trigonometrico.

BUſqueſe arriba en la frente de la tabla el numero de los grados; y hallado èſte, buſquenſe en la primer co-