N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
9901	3.9956791	9934	3.9971241	9967	3.9985644
9902	3.9957229	9935	3.9971679	9968	3.9986080
9903	3.9957668	9936	3.9972116	9969	3.9986516
9904	3.9958106	9937	3.9972553	9970	3.9986951
9905	3.9958545	9938	3.9972990	9971	3.9987387
9906	3.9958983	9939	3.9973427	9972	3.9987823
9907	3.9959422	9940	3.9973864	9973	3.9988258
9908	3.9959860	9941	3.9974301	9974	3.9988694
9909	3.9960298	9942	3.9974737	9975	3.9989129
9910	3.9960736	9943	3.9975154	9976	3.9989564
9911	3.9961175	9944	3.9975611	9977	3.9990000
9912	3.9961613	9945	3.9976048	9978	3.9990435
9913	3.9962051	9946	3.9976484	9979	3.9990870
9914	3.9962489	9947	3.9976921	9980	3.9991305
9915	3.9962927	9948	3.9977358	9981	3.9991740
9916	3.9963365	9949	3.9977794	9982	3.9992176
9917	3.9963803	9950	3.9978231	9983	3.9992611
9918	3.9964241	9951	3.9978667	9984	3.9993046
9919	3.9964679	9952	3.9979104	9985	3.9993381
9920	3.9965117	9953	5.9979540	9986	3.9993916
9921	3.9965554	9954	3.9979976	9987	3.9994350
9922	3.9965992	9955	3.9980413	9988	3.9994785
9923	3.9966430	9956	3.9980849	9989	3.9995220
9924	3.9966867	9957	3.9981285	9990	3.9995655
9925	3.9967305	9958	3.9981721	9991	3.9996089
9926	3.9967743	9959	3.9982157	9992	3.9996524
9927	3.9968180	9960	3.9982593	9993	3.9996959
9928	3.9968618	9961	3.9983029	9994	3.9997393
9929	3.9969055	9962	3.9983465	9995	3.9997828
9930	3.9969492	9963	3.9983901	9996	3.9998263
9931	3.9969930	9964	3.9984337	9997	3.9998697
9932	3.9970367	9965	3.9984773	9998	3.9999131
9933	3.9970804	9966	3.9985209	9999	3.9999566
9934	3.9971241	9967	3.9985644	10000	4.0000000

LIBRO III.

DE LA TRIGONOMETRIA Rectilinea.

DEFINICIONES.

1 EN los triangulos rectangulos, tanto rectilineos, como esfericos, el lado opuesto al angulo recto, se llama *hipotenusa*; los otros se quedan con el nombre general de *lados*.

2 En qualquiera triangulo, el angulo que hace frente à un lado, se llama *angulo opuesto à aquel lado*, y èste se llama *lado opuesto al angulo*.

3 *Angulo adyacente*, ò *contermino à un lado*, es el que se forma sobre aquel lado; y asimismo, *lado adyacente*, ò *contermino à un angulo*, es el que juntamente con otro lado forma aquel angulo. Las especies de los triangulos rectilineos, y sus definiciones, quedan explicadas en el *lib*. 1. de la Geometria Elementar.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA *la resolucion de los triangulos rectilineos rectangulos.*

PROP. I. Theorema.

En qualquiera triangulo rectilineo, los lados son proporcionales con los senos de los angulos opuestos. (*fig.6.*)

SEa qualquier triangulo rectilineo ABC. Digo, que asi se ha el lado AB con el lado BC, como el seno del angulo ACB, con el seno del angulo BAC. Circunscrivase à dicho triangulo un circulo; y dividiendo por medio los lados AB, BC, en D, y E, tirense del centro las lineas FD, FE, las quales (3.3.Eucl.) seràn perpendiculares à los lados AB, BC, y dividiràn por medio los angulos AFB, BFC: tirense tambien las lineas FB, FA, FC; y serà (20.3.Eucl.) el angulo AFD, hecho en el centro, igual al angulo ACB, hecho en la periferia; y el angulo BFE, igual al angulo BAC.

Demonstr. Assi se ha el lado AB, al lado BC, como AD, mitad de AB, à BE, mitad de BC; (15.5.Eucl.) y siendo AD (*defin.* 4. *lib.* 1.) seno del angulo AFD, ù de ACB su igual; (20. 3. Eucl.) y BE, seno del angulo BFE, ù de BAC su igual, serà el lado AB, con el lado BC, como el seno del angulo ACB, con el seno del angulo BAC.

Lo mismo se convence, aunque el triangulo sea obtusangulo; y para que se vea con mas claridad, sea en la *fig.* 7. el triangulo obtusangulo BAC. Circunscrivasele el circulo: dividase el lado BC por medio en D; y tirese del centro la GD, que (3.3. Eucl.) serà perpendicular à BC; y la BD, serà seno del angulo BGD.

Demonstr. El angulo BGC, formado en el centro, es duplo, assi del angulo F, como del angulo BGD: luego el angulo F, y el BGD son iguales; y siendo BD seno del angulo BGD, tambien lo serà del angulo F: luego, segun lo dicho en la *defin.* 4. del *lib.* 1. la misma BD serà tambien seno del angulo, que es complemento del angulo F, al semicirculo; siendo pues (22.3.Eucl.) el angulo obtuso A, complemento del angulo F, al semicirculo, serà BD seno del angulo A: luego la misma razon tendrà el lado BC, al lado BA, que BD, seno del angulo A, à BN, seno del angulo C, como consta de la demonstracion antecedente. *Este theorema es general para todos los triangulos rectilineos, y el fundamento de las operaciones trigonometricas.*

PROP.

PROP. II. Theorema.

En los triangulos rectangulos la misma razon tiene la hipotenusa con qualquiera lado, que el radio al seno del angulo opuesto à dicho lado. (fig. 8.)

SEa el triangulo ABC rectangulo en C. Digo, que la hipotenusa BA, tiene con el lado AC, la misma razon que el radio BD à la DE, seno del angulo B opuesto al lado AC.

Demonstr. Por ser los angulos C, y E rectos, seràn las AC, DE paralelas: luego (2. 6.) los triangulos BAC, BDE son semejantes, y sus lados son proporcionales, como la hipotenusa BA, al lado AC; assi el radio BD, à DE seno del angulo B. Lo mismo se demonstrarà con el lado BC, haciendo con èl otra construccion semejante.

PROP. III. Theorema.

En los triangulos rectangulos, assi se ha el lado contermino à un angulo con el lado opuesto à dicho angulo, como el radio con la tangente de dicho angulo. (fig. 8.)

SEa el triangulo ABC. Digo, que el lado BC, que es contermino al angulo B, assi se ha con el lado CA, opuesto al mismo angulo, como el radio BG à la GF, tangente del mismo angulo B.

Demonstr. Los triangulos BAC, BFG, (2.6.Eucl.) son semejantes: luego sus lados son proporcionales, como BC à CA, assi BG à GF.

Por la misma razon son proporcionales el lado BC à la hipotenusa BA, como el radio BG à la secante BF.

CAPITULO II.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS RECTANGULOS.

1 EN qualquiera triangulo se hallan seis cosas, es à saber, tres lados, y tres angulos; y de estas seis se han de presuponer conocidas tres, para que se

Q 2 pue-

pueda reſolver el triangulo. En los triangulos rectilineos, aunque ſe ſupongan conocidos los tres angulos, no ſe puede paſſar al conocimiento de los lados, ſino es que uno de èſtos ſe ſuponga conocido, porque ſiendo los angulos los miſmos, pueden ſer mayores, ò menores los lados: conque para llegar à la reſolucion, ſerà meneſter tener conocidos, ò dos lados, y un angulo; ò dos angulos, y un lado; ò los tres lados.

2 En el triangulo rectangulo, como el angulo recto ſiempre ſea conocido, ſolo ſe neceſsita del conocimiento de un otro angulo, y de un lado, ù de dos lados.

3 Para mayor claridad las coſas dadas, ò que ſe ſuponen conocidas en un triangulo, ſe notaràn con una raya pequeña; y las que ſe buſcan, con un zero.

4 Sea regla general, ſiempre que la hipotenuſa entra en la proporcion, ſe reſuelve el triangulo en virtud del theorema 2. y ſiempre que entran en dicha proporcion dos lados, ſe reſuelve por el theorema 3.

5 En las reglas de tres, para reſolver los triangulos, pondremos en lugar del logarithmo del primer termino ſu complemento logarithmico, (31. *lib.* 2.) y le ſeñalaremos con las iniciales C, L: conque quando el primer termino fuere el radio, no hay para que eſcrivirle, por ſer el complemento del radio al miſmo radio todo zeros; ſi bien en los exemplos que ſe pondràn en adelante, le eſcriviremos para mayor expreſsion de la practica.

6 En conſequencia de eſto, como la reſolucion de los triangulos conſiſta en hallar un quarto proporcional à los tres terminos dados, ò conocidos, obſervarèmos en las reſoluciones la regla dada en la *propoſ.* 33. *lib.* 2. ſegun la qual, la ſuma de los tres logarithmos menos el radio, da el quarto logarithmo que ſe buſca. Quitaſe el radio, quitando, ò omitiendo la unidad primera que ſe havia de eſcrivir à la izquierda de la caracteriſtica: y ſi el termino primero fuere tangente mayor que la de 45. grados, porque en ella ſe toma el complemento al duplo radio, ſe havrà de quitar èſte de la ſuma, omitiendo el 2. que ſe havia de eſcrivir à la izquierda de la caracteriſtica. Tengaſe eſto muy en la memoria.

Las propoſiciones ſiguientes contienen la practica de reſolver los triangulos, en las quales guardarèmos eſte orden, que las primeras ſerviràn para hallar los angulos; y las otras, para hallar los lados.

PROP. IV. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los lados, hallar los angulos. (*fig.* 9.)

EN el triangulo ABC, ſe ſuponen conocidos las lados AB, y CB, de ſuerte, que AB es de 1230. pies; y CB de 720. pies. Pideſe el angulo A.

Proporcion, prop. 3.	*Logarithmos.*
Como AB 1230. *pies,*	C.L. 6.9100949.
à CB 720. *pies;*	2.8573325.
aſsi el radio,	10.0000000.
à la tangente del ang. A. 30.*gr.* 20.*min.*	9.7674274.

Hallado el angulo A, queda conocido el angulo C, que es ſu complemento à 90. grados.

PROP. V. Problema.

En el triangulo rectangulo, dada la hipotenuſa, y un lado, hallar los angulos. (*fig.* 9.)

EN el miſmo triangulo ABC, dada la hipotenuſa AC, 1425. pies, y el lado AB 1230. pies, ſe pide el angulo C.

Proporcion, propoſ. 2.	*Logarithmos.*
Como la hipot. AC 1425. *pies,*	C.L. 6.8461851.
al radio;	10.0000000.
aſsi AB 1230. *pies,*	3.0899051.
al ſeno del angulo C 59.*gr.* 40.*min.*	9.9360902.

Hallado el angulo C, ſe ſabe el angulo A, ſu complemento à 90. gr.

PROP. VI. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y un lado, hallar el otro lado. (*fig.* 10.)

SEa el angulo A 30.gr. 20.min. y el lado AB 1230. pies. Pideſe el lado BC.

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el radio,	C.L. 0.0000000.
à la tang. del ang. A conter. 30.gr. 20.m.	9.7674274.
aſsi el lado AB 1230. pies,	3.0899051.
al lado BC 720. pies.	2.8573325.

PROP. VII. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y la hipotenuſa, hallar los lados. (fig.10.)

EN el triangulo ABC es el angulo A 30. gr. 20.min. y la hipotenuſa AC 1425. pies. Pideſe el lado BC.

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el radio,	0.0000000.
à la hipotenuſa AC 1425. pies;	3.1538149.
aſsi el ſeno del ang. 30. 20.min.	9.7033170.
al lado opueſto BC 720. pies.	2.8571319.

De la miſma manera ſe hallarà el otro lado AB, valiendoſe de ſu angulo opueſto C.

PROP. VIII. Problema.

En el triangulo rectangulo, dada la hipotenuſa, y un lado, hallar el otro lado. (fig.10.)

EN el miſmo triangulo ABC, ſea dada la hipotenuſa AC 1425. pies; el lado AB 1230. pies. Pideſe el otro lado CB.

Modo 1. Hallenſe (5.) los angulos A; y C; y hallados èſtos, buſqueſe el lado CB, que ſe hallarà por la *propoſ.* 6. ò por la 7.

Modo 2. Sumeſe la hipotenuſa 1425. y el lado dado 1230. y ſerà la ſuma 2655. Halleſe el logarithmo de eſta ſuma, que es 3.4240645. Reſteſe el lado dado 1230. de la hipotenuſa 1425. y es la diferencia 195. cuyo logarithmo es 2.2900346. Sumenſe eſtos dos logarithmos, y la mitad de la ſuma, que es 2.8570495. ſerà el logarithmo

mo del lado BC 720. que ſe deſea. El fundamento de eſta operacion, ſe verà mas adelante.

Hipotenuſa AC	1425.	
lado AB	1230.	
ſuma	2655.	L. 3.4240645.
diferencia	195.	L. 2.2900346.
ſuma		5.7140991.
ſemiſuma		2.8570495. BC 720.

PROP. IX. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los angulos, y un lado, hallar la hipotenuſa. (fig. 11.)

EN el triangulo ABC, ſe ſupone dado el lado BC 720. pies, y el angulo A 30. gr. 20. min. Pideſe la hypotenuſa AC.

Proporcion.	*Logarithmos.*
Como el ſeno del ang. A 30.gr. 20.min.	C.L. 0.2966830.
al lado BC ſu opueſto 720. pies;	2.8573325.
aſsi el radio	10.0000000.
à la hipotenuſa 1425.	3.1540155.

PROP. X. Problema.

En el triangulo rectangulo, dados los lados, hallar la hipotenuſa. (fig. 11.)

BUſquenſe primeramente los angulos; (4.) y hallados èſtos, buſqueſe la hipotenuſa, por la propoſ. antecedente.

CA-

CAPITULO III.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos rectilineos obliquangulos.

PROP. XI. Theorema.

En qualquiera triangulo rectilineo, la suma de dos lados, à la diferencia de los mismos, tiene la misma razon que la tangente de la semisuma de los angulos opuestos, à la tangente de la semidiferencia de los mismos. (fig. 12.)

E*xplicacion.* Digo, que en el triangulo ABC, la suma de los lados AB, AC, tiene la misma razon con la diferencia de los mismos, que la tangente de la semisuma de los angulos B, y C, opuestos à dichos lados, tiene con la tangente de la semidiferencia de los mismos angulos.

Continuese la linea BA, hasta D, de suerte, que AD sea igual à AC: cortese DR igual à AB: con esto serà toda la DB, suma de los lados BA, AC; y RA serà la diferencia de los mismos lados. Tirese la linea DC; y porque AD, AC son iguales, la perpendicular AE, dividirà por medio, tanto la basa DC, como al angulo DAC. (*corolar.* 3. *de la* 5. *lib.* 1. Eucl.) Y porque el angulo DAC es externo, respecto del triangulo ABC, serà (32.1. Eucl.) igual à la suma de los angulos B, y C: conque el angulo EAC, serà la semisuma de los mismos angulos. Tirense las rectas RL, AH, paralelas à BC, y serà (27.1. Eucl.) el angulo DAH igual al angulo B; y HAC, igual al alterno ACB. Y siendo BA igual à RD, serà (2.6. Eucl.) CH igual à LD; y por consiguiente EH, EL, quedaràn iguales, como tambien los angulos EAL, EAH, y los LAD, HAC: y el angulo LAH, serà la diferencia de los angulos DAH, HAC, ù de B, y C sus iguales: luego EAH, serà la semidiferencia de los mismos angulos B, y C; y haciendo un circulo con el radio AE, serà EC tangente de la semisuma EAC; y EH tangente de la semidiferencia EAH. Demuestro pues, que BD, suma de los lados BA, AC, tiene con RA, diferencia de los mismos, la

la razon misma que EC, tangente de la semisuma de los angulos B, y C, con EH, tangente de la semidiferencia de los mismos.

Demonstr. Por ser LR, AH, BC paralelas, seràn proporcionales (2.6. Eucl.) como DB à RA, assi DC à LH; y siendo toda DC à toda LH, como EC, mitad de DC à EH, mitad de LH, serà DB, suma de los lados, à RA, diferencia de los mismos, como EC, tangente de la semisuma de los angulos B, y C, à EH, tangente de la semidiferencia de los mismos.

COROLARIO.

*E*N *este Theorema se funda la resolucion de qualquiera triangulo, dados dos de sus lados, y el angulo comprehendido entre ellos; porque sumando los lados* AB, AC, *se sabe su suma; y restando* AB *de* AC, *se sabe su diferencia. Tambien restando el angulo* A *de* 180. *grad. el residuo es la suma de los angulos* B, *y* C, *y su mitad es la semisuma, con lo qual se dispondrà la proporcion demonstrada: como la suma de los lados, à la diferencia de los mismos; assi la tangente de la semisuma, al termino quarto, que serà la tangente de la semidiferencia de dichos angulos: esta semidiferencia ya conocida, si se añade à la semisuma de los angulos, se sabrà el angulo mayor; y restandola de la misma semisuma, se sabrà el menor.*

PROP. XII. Theorema.

En qualquier triangulo, el lado mayor se ha con la suma de los otros lados, como la diferencia de estos à la diferencia de los segmentos hechos en el lado mayor con la perpendicular tirada del vertice à dicho lado. (fig. 13.)

E*xplicacion.* Sea el triangulo ABC, cuyo lado mayor, ò basa sea AC: cayga de la cuspide B la perpendicular BE, y con la distancia BC descrivase un circulo del centro B, y continuese el lado AB hasta G. Hecho esto, porque BG, y BC son iguales, serà ABG suma de los lados AB, BC; y porque la perpendicular BE divide la cuerda DC en E en dos partes iguales, (3.3. Eucl.) serà DA la diferencia de los seg-

segmentos CE, EA; y porque BC, y BH son iguales, serà HA la diferencia de los lados CB, BA. Digo pues, que assi se ha AC lado mayor, à GA suma de los otros lados, como HA diferencia de los mismos lados, à DA diferencia de los segmentos de la basa.

Demonstracion. El rectangulo hecho de AG, AH, es igual al rectangulo hecho de AC, AD: (36.3. Eucl.) luego si dichas lineas se disponen de esta suerte: AC, AG, AH, AD, serà verdadero decir, que el rectangulo de las extremas AC, AD, es igual al rectangulo de las medias AG, AH, por la razon sobredicha: luego (16.6. Eucl.) seràn proporcionales.

Como AC, basa, ò lado mayor,
à AG, suma de los otros lados;
assi HA, diferencia de los mismos lados,
à DA, diferencia de los segmentos de la basa.

COROLARIO.

EN este Theorema se funda la resolucion de qualquiera triangulo, quando se dàn sus tres lados sin conocerse ningun angulo; porque tirando la perpendicular BE, queda dividido en dos triangulos rectangulos; y como se dèn conocidos los tres lados del triangulo ABC, se sabe el lado mayor AC; y sumando los otros AB, y BC, se sabe su suma AG; y restando BC de BA, se sabe AH su diferencia; y por regla de tres, con los terminos AC, AG, AH, se sabe el quarto proporcional AD, que restandole de AC, se sabe DC; y por consiguiente, su mitad EC: luego en el triangulo rectangulo BEC se sabe el lado EC, y la hipotenusa BC: luego (5.) se hallarà el angulo EBC, diciendo: como la hipotenusa BC, al radio, assi el lado EC al seno del angulo EBC: sabido èste, se sabe el angulo C, su complemento à 90. grad. De la misma suerte se resolverà el triangulo AEB, y se hallarà el angulo A, y quedarà resuelto el triangulo ABC.

Estos Theoremas son absolutamente bastantes para demonstrar la resolucion de qualesquiera triangulos rectilineos obliquangulos; y assi por la brevedad omito otros, que à mas de ser cansados, solo sirven para demonstrar otras practicas de resolver, que para mayor abundancia se pondràn en su lugar.

CA-

CAPITULO IV.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS *rectilineos obliquangulos.*

PROP. XIII. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opuestos, hallar los otros angulos, sabiendose si el que se busca es agudo, ò obtuso. (fig. 14.)

EN el triangulo ABC, conocidos los lados BA, AC, aquel de 400. pies, y èste de 300. y el angulo B opuesto al lado AC de 54. grad. 30. min. se buscan los angulos C, y A; y primeramente el angulo C opuesto al lado AB, suponiendo sea dicho angulo agudo.

Proporcion, prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el lado AC opuesto à B,	400.	C.L. 7.3979400.
al seno del angulo B;	54.gr.30.min.	9.9106860.
assi el lado AB,	300.	2.4771212.
al seno del ang. C.	37.gr.38.min.	9.7857472.

Hallado el angulo C, se sabe el angulo A; porque sumando el angulo C hallado, con el angulo B dado, lo que và de esta suma hasta los 180. grados es el angulo A, que en este exemplo es 87. gr. 52. min.

Dixe al principio ser menester, se conozca si el angulo C, que se busca es agudo, ò obtuso; porque siendo un mismo seno comun para el angulo agudo, y para el obtuso, que es su complemento al semicirculo, quedaria siempre en duda el Analista, qual de los dos sea el verdadero.

PROP.