ſegmentos CE, EA; y porque BC, y BH ſon iguales, ſerà HA la diferencia de los lados CB, BA. Digo pues, que aſsi ſe ha AC lado mayor, à GA ſuma de los otros lados, como HA diferencia de los miſmos lados, à DA diferencia de los ſegmentos de la baſa.

Demonſtracion. El rectangulo hecho de AG, AH, es igual al rectangulo hecho de AC, AD: (36.3. Eucl.) luego ſi dichas lineas ſe diſponen de eſta ſuerte: AC, AG, AH, AD, ſerà verdadero decir, que el rectangulo de las extremas AC, AD, es igual al rectangulo de las medias AG, AH, por la razon ſobredicha: luego (16.6. Eucl.) ſeràn proporcionales.

Como AC, baſa, ò lado mayor,
à AG, ſuma de los otros lados;
aſsi HA, diferencia de los miſmos lados,
à DA, diferencia de los ſegmentos de la baſa.

COROLARIO.

EN eſte Theorema ſe funda la reſolucion de qualquiera triangulo, quando ſe dàn ſus tres lados ſin conocerſe ningun angulo; porque tirando la perpendicular BE, queda dividido en dos triangulos rectangulos; y como ſe dèn conocidos los tres lados del triangulo ABC, ſe ſabe el lado mayor AC; y ſumando los otros AB, y BC, ſe ſabe ſu ſuma AG; y reſtando BC de BA, ſe ſabe AH ſu diferencia; y por regla de tres, con los terminos AC, AG, AH, ſe ſabe el quarto proporcional AD, que reſtandole de AC, ſe ſabe DC; y por conſiguiente, ſu mitad EC: luego en el triangulo rectangulo BEC ſe ſabe el lado EC, y la hipotenuſa BC: luego (5.) ſe hallarà el angulo EBC, diciendo: como la hipotenuſa BC, al radio, aſsi el lado EC al ſeno del angulo EBC: ſabido èſte, ſe ſabe el angulo C, ſu complemento à 90. grad. De la miſma ſuerte ſe reſolverà el triangulo AEB, y ſe hallarà el angulo A, y quedarà reſuelto el triangulo ABC.

Eſtos Theoremas ſon abſolutamente baſtantes para demonſtrar la reſolucion de qualeſquiera triangulos rectilineos obliquangulos; y aſsi por la brevedad omito otros, que à mas de ſer canſados, ſolo ſirven para demonſtrar otras practicas de reſolver, que para mayor abundancia ſe pondràn en ſu lugar.

CA-

CAPITULO IV.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS *rectilineos obliquangulos.*

PROP. XIII. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opueſtos, hallar los otros angulos, ſabiendoſe ſi el que ſe buſca es agudo, ò obtuſo. (*fig.* 14.)

EN el triangulo ABC, conocidos los lados BA, AC, aquel de 400. pies, y èſte de 300. y el angulo B opueſto al lado AC de 54. grad. 30. min. ſe buſcan los angulos C, y A; y primeramente el angulo C opueſto al lado AB, ſuponiendo ſea dicho angulo agudo.

Proporcion, prop. 1.			*Logarithmos.*
Como el lado AC opueſto à B,	400.	C.L.	7.3979400.
al ſeno del angulo B;	54.gr.30.min.		9.9106860.
aſsi el lado AB,	300.		2.4771212.
al ſeno del ang. C.	37.gr.38.min.		9.7857472.

Hallado el angulo C, ſe ſabe el angulo A; porque ſumando el angulo C hallado, con el angulo B dado, lo que và de eſta ſuma haſta los 180. grados es el angulo A, que en eſte exemplo es 87. gr. 52. min.

Dixe al principio ſer meneſter, ſe conozca ſi el angulo C, que ſe buſca es agudo, ò obtuſo; porque ſiendo un miſmo ſeno comun para el angulo agudo, y para el obtuſo, que es ſu complemento al ſemicirculo, quedaria ſiempre en duda el Analiſta, qual de los dos ſea el verdadero.

PROP.

PROP. XIV. Problema.

En el triangulo obliquangulo dados los lados, y el angulo comprehendido entre ellos, hallar los demàs angulos. (fig. 15.)

EN el triangulo ABC se supone conocido el angulo A, de 30. grad. 4. min. el lado CA 590. pies; y AB 300. y se buscan los angulos B, y C. *Operacion.* Hallese el complemento del angulo conocido A à 180. grad. y serà 149. grad. 56. min. y tanto serà la suma de los otros angulos B, y C; y la semisuma serà 74. gr. 58. min. Sumense los lados conocidos CA, AB, y serà la suma 890. pies: restese el lado menor AB del mayor AC, y serà la diferencia 290. pies; y dispongase (11.) la siguiente proporcion.

Como la suma de los lados	890.	C.L. 7.0506100.
à la diferencia de los mismos	290.	2.4623980.
assi la tang. de la semisuma de los angulos B, y C,	74.gr.58.m.	10.5709379.
à la tang. de la semidifer. de los mismos ang. B, y C,	50.gr.30.m.	10.0839459.

Es pues la semidiferencia de los angulos B, y C, 50.gr. 30. min. que añadida à la semisuma de los mismos 74. gr. 58. min. da el valor del angulo B, 125. gr. 28. min. Y restada de la misma semisuma, da el angulo C de 24. gr. 28. min. y queda hecha la resolucion.

PROP. XV. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados los tres lados, hallar qualquiera angulo. (fig. 16.)

SEa el triangulo ABC, cuyos tres lados se suponen conocidos; AC 1277. pies; AB 865. y BG 632. Pidense sus angulos.

Modo 1. Supongase, que el lado mayor CA, es la basa, à quien se tira la perpendicular BE; conque quedarà dicho triangulo dividido en dos triangulos rectangulos. Sumense los dos lados BC, y BA, y serà la suma 1497. Restese el lado BC del lado BA, y serà la diferencia 233. y se dispondrà la proporcion siguiente, fundada en la *prop.* 12.

Como AC,	1277	C.L. 6.8638091.
à la suma de AB, y BC,	1497	3.1752218.
assi la diferencia de AB, y BC,	233	2.3673559.
à AD, diferencia de los segmen. AE, EC,	273	2.4363868.

Hecho esto, si la diferencia AD 273. se resta de AC 1277. quedarà DC 1004. cuya mitad 502. es CE, ò ED; y añadida à AD, serà el segmento EA 775.

Conque en el triangulo rectangulo ABE, tenemos ya conocida la hipotenusa AB 865. y el lado AE 775. luego por la *propos.* 5. se hallarà el angulo ABE 63. gr. 38. min. y el angulo A 26. gr. 22. min. Assimismo en el triangulo rectangulo BEC, tenemos conocida la hipotenusa BC 632. y el lado CE 502. luego por la dicha *propos.* 5. se hallarà el angulo CBE 52. gr. 35. min. y el angulo C 37. gr. 25. min. Sumense ultimamente los angulos ABE, y CBE, y la suma 116. gr. 13. min. serà el valor del angulo ABC, y queda todo conocido.

Modo 2. Sumense los tres lados, y de la semisuma restense los lados conterminos al angulo que se busca, cada uno de por sì, y guardense las diferencias halladas, y se formarà esta proporcion.

Como el producto de los lados conterminos del angulo que se busca,
al producto de las diferencias halladas:
assi el quadrado del radio,
al quadrado del seno de la mitad del angulo que se busca.

Para hallar el logarithmo del primer termino, ò producto de los lados conterminos, se han de sumar los logarithmos de dichos lados, y la suma serà el logarithmo de su producto: (*corol.* 5. *lib.* 2.) y porque en lugar de este lo-

logarithmo del producto, uſamos de ſu complemento logarithmico (que es lo miſmo que la ſuma de los complementos logarithmicos de cada lado) baſtarà, para mayor brevedad, eſcrivir los dos dichos complementos en lugar del termino primero. Deſpues de eſto ſe eſcriviràn los logarithmos de las diferencias halladas, porque ambos juntos ſon el logarithmo del termino ſegundo; eſto es, del producto de las diferencias. Deſpues ſe havia de eſcrivir el logarithmo duplicado del radio, que (14. 2.) es el logarithmo de ſu quadrado; pero por haverſe pueſto en el primer termino los dos complementos logarithmicos, ya no es meneſter, por haverſe añadido en cada uno de ellos una vez el logarithmo del radio. Sumenſe todos los dichos logarithmos ſin quitar el radio de la ſuma, por haverſe omitido ya en el tercer termino; y la mitad de la ſuma ſerà el logarithmo de la mitad del angulo que ſe buſca. Toda eſta operacion ſe ve en la ſiguiente reſolucion del triangulo ABC. (*fig.* 15.)

Lado AC			1277.
Lado AB			865.
Lado BC			632.
Suma de los lados.			2774.
Semiſuma de los lados.			1387.
Diferencia de la ſemiſuma, y AB.			522.
Diferencia de la ſemiſuma, y BC.			755.
			Logarithmos.
Lado AB.	865.	C.L.	7.0629839.
Lado BC.	632.	C.L.	7.1992829.
Difer. de AB.	522.		2.7176705.
Difer. de BC.	755.		2.8779469.
Suma.			19.8578842.
Semiſuma.			9.9289421.

Eſta ſemiſuma es el logarithmo del ſeno de 58. grad. 6. min. y medio, mitad del angulo ABC: y ſu duplo 116. grad. 13. min. es el angulo ABC que ſe buſca.

Eſte ſegundo modo de reſolver es de Adriano Ulac, cuya practica es tan facil, quanto dificultoſa ſu demonſtracion; y

y el P. Dechales en el *lib.* 3. *de la Trigonomet.* à lo ultimo de la *prop.* 20. dice: *Demonſtrationem autem hujus praxis ſatis claram adhuc non inveni.* Eſto no obſtante, intentarè demonſtrarle, añadiendo antes el lema ſiguiente.

LEMA.

En qualquiera triangulo ſon proporcionales: el rectangulo hecho de los lados, que comprehenden un angulo, al rectangulo hecho de la ſemiſuma de la baſa, y diferencia de los lados; y de la ſemidiferencia que hay entre la baſa, y la diferencia de los lados: aſsi el quadrado del radio, al quadrado del ſeno de la mitad del angulo comprehendido de dichos lados. (*fig.* 17.)

E*xplicacion.* Sea el triangulo BAC; y deſde a, como centro, con la diſtancia ab, hagaſe un arco, que cortarà al lado ac en m, y ſerà am igual à ab; y por conſiguiente, ſerà mc la diferencia de los lados ab, ac; y tomando cn, igual à cm, ſerà bn la diferencia que hay entre la baſa bc, y nc, diferencia de los lados: corteſe la bn por medio en d, y ſerà nd la ſemidiferencia que hay entre la baſa, y la diferencia de los lados; y añadiendo eſta ſemidiferencia dn à la parte menor nc, reſultarà la dc ſemiſuma de toda la baſa bc, y de nc diferencia de los lados; y porque ab, am, ſon iguales, tirada la perpendicular ap, quedarà dividido el angulo a, y la recta bm en dos partes iguales: y haviendoſe deſcrito el arco bm, con la diſtancia ab, ſerà ab el radio, y bp ſeno del angulo bap, mitad del angulo a. Digo pues, que el rectangulo hecho de ba, ac, al rectangulo hecho de bd, dc, ſe hà como el quadrado del radio ab, al quadrado de bp, ſeno del angulo bap. Para mayor brevedad, y claridad uſarè de las abreviaciones, poniendo R. por rectangulo, Q. por quadrado, y de los ſignos + y —

Demonſtracion. El Q. bc Ω Q. ba + Q. ac + 2. R. cao. (12.2.Eucl.) Y ſiendo am Ω ba, ſe ſubſtituirà en la igualacion ſobredicha (que es la primera en el mapa ſiguiente) el quadrado de am, en lugar del quadrado de ba; y ſaldrà la igualacion del numer.2. Y ſiendo (7.2.Eucl.) el Q.am +

Q.

Q. ac ≏ 2. R. cam + Q. mc: substituyendo los 2. R. cam + Q. mc, en la igualacion del num. 2. en lugar del Q. am + Q. ac, resultarà la igualacion del num. 3. à mas de esto, 2. R. cam + 2. R. cao ≏ 2. R. ca, om: porque un rectang. de ca, am, y otro de ca, ao juntos, componen un rectangulo, cuya altura es ca; y su basa es la linea compuesta de am, ao, que es om: luego los dos hacen un rectangulo de ca, om: luego 2. R. cam + 2. R. cao ≏ 2. R. ca, om. Substituyendo pues en la igualacion del num. 3. los 2. R. ca, om, en lugar de los 2. R. cam + 2. R. cao, resultarà la igualacion del num. 4. que es Q. bc ≏ 2. R. ca, om + Q. mc.

Num. 1. Q. bc ≏ Q. ba + Q. ac + 2. R. cao,
am ≏ ba.
Num. 2. Q. bc ≏ Q. am + Q. ac + 2. R. cao,
Q. am + Q. ac ≏ 2. R. cam + Q. mc.
Num. 3. Q. bc ≏ 2. R. cam + Q. mc + 2. R. cao,
2. R. cam + 2. R. cao ≏ 2. R. ca, om.
Num. 4. Q. bc ≏ 2. R. ca, om + Q. mc.

Es pues constante, que el Q. bc es igual à 2. R. ca, om, + Q. mc: luego el Q. bc — Q. mc, es igual à 2. R. ca, om: y siendo (8.2. Eucl.) el Q. de toda la bc, igual à 4. R. de cd, db (ù de cd, nd, que es lo mismo) + al Q. nc, que tambien es lo mismo que mc, serà el Q. de toda bc — Q. nc. ≏ 4. R. cd, db: luego 2. R. ca, om, son iguales à los 4. R. cd, db: luego medio rectangulo de ca, om es igual à un rectangulo de cd, db.

Esto probado, passo à demonstrar, que el rectangulo de los lados ab, ac, al rectangulo cdb, hecho de cd, semisuma de la basa, y diferencia de los lados, y bd semidiferencia de la basa, y diferencia de los lados, tiene la razon que el quadrado del radio ab, al quadrado de bp, seno de la mitad del angulo a.

El quadrado de ab, y el rectangulo de ab, om, por tener una misma altura ab, se han (1.6. Eucl.) como sus basas ab, om. Assimismo el rectangulo de ab, ac, al rectangulo de ac, om, por tener la misma altura ac, se hà como la basa

sa ab, à la basa om: luego la misma razon tiene el quadrado de ab, al rectangulo ab, om, que tiene el rectangulo ab, ac, al rectangulo ac, om, supuesto q̃ entrambas razones son iguales à la de ab à om: luego el quadrado ab, à la mitad del rectangulo ab, om, se ha como el rectangulo ab, ac, à la mitad del rectangulo ac, om, la qual mitad, como arriba dixe, es el rectangulo hecho de cd, db.

Siendo pues los triangulos bom, apm equiangulos, por tener los angulos o, y p rectos, y el angulo m comun, seràn proporcionales (8.6.) am, à mp, ò su igual bp, como bm à mo: luego am à bp, se ha como la mitad de bm; esto es, como bp, à la mitad de mo: luego (17.6. Euclid.) el rectangulo de am, ò ba, y de la mitad de om, es igual al quadrado de bp. Y siendo el mismo rectangulo el que se hace de ab, y de la mitad de om, que el que se hace de om, y la mitad de ab; serà el rectangulo de la mitad de ab, y de toda la om, igual al quadrado de bp: y haviendo probado, que el quadrado de ab tiene la misma razon con la mitad del rectangulo de ab, om, que hay del rectangulo de ab, ac, à la mitad del rectangulo de ac, om; tambien havrà la misma razon del quadrado de ab, al quadrado de bp, que hay del rectangulo ab, ac, à la mitad del rectangulo de ac, om; la qual mitad diximos ser igual al rectangulo cdb: luego son proporcionales.

Como el rectangulo ab, ac, de los lados que comprehenden al angulo a,
al rectangulo cdb de la suma, y semidiferencia sobredichas;
assi el quadrado del radio ab,
al quadrado de bp, seno del angulo bap, mitad del angulo bac.

DEMONSTRACION.

Del modo 2. de resolver un triangulo, dados solamente sus traslados.

De la misma practica de este *modo* 2. arriba puesta, consta, que para su evidencia, solo es menester demonstrar la proporcion que alli se puso, como fundamento de toda la operacion, que es la siguiente.

Como el producto, ò rectangulo de los lados conterminos al angulo que se busca,
al producto, ò rectangulo de las diferencias que hay entre cada uno de dichos lados, y la semisuma de los tres;
assi el quadrado del radio,
al quadrado del seno de la mitad del angulo que se busca.

Demuestrase pues esta proporcion en la *fig.* 18. donde se ve el mismo triangulo ABC, que se resolviò, en el qual, descrito el circulo con el radio BC, que es el lado menor, es AH la diferencia de los lados AB, BC; y siendo AO, igual à AH, serà OC la suma de la basa, y de la diferencia de los lados; y QO serà la semisuma. Esto supuesto, porque la semisuma de los tres lados se compone de las tres mitades de los lados, si de esta semisuma se quita el lado BC, ù dos mitades de BC, quedaràn la mitad de CA, y la mitad de BA, disminuida en una mitad de BC; y porque quitandole à la mitad de AB, una mitad de BC, el residuo es una mitad de AH, ò AO, se sigue, que restando de la semisuma de los tres lados el lado BC, el residuo es la semibasa, y semidiferencia de los lados, que es lo mismo que la semisuma de la basa, y diferencia de los lados: luego la diferencia 755. hallada por esta regla, es la semisuma de la basa, y de la diferencia de los lados. De la misma suerte probarè, que la otra diferencia 522. es la semidiferencia que hay entre la basa AC, y AP, diferencia de los lados: luego el rectangulo hecho de las diferencias 755. y 522. segun dicha regla, es el rectangulo hecho de la semisuma de la basa, y diferencia de los lados, y de la semidiferencia que hay entre la basa, y la diferencia de los lados.

Siendo pues por el lema antecedente proporcionales, como el rectangulo de los lados, al rectangulo de la semisuma, y semidiferencia sobredichas; assi el quadrado del radio, al quadrado del seno de la mitad del angulo, que se busca: seràn tambien proporcionales, el rectangulo de los lados conterminos, al angulo que se busca, al rectangulo de las diferencias de cada lado, y la semisuma de los tres: como el quadrado del radio, al quadrado del seno de la mitad del

del angulo que se busca, que es el unico fundamento del sobredicho *modo* 2. de resolver.

PROP. XVI. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados los angulos, y un lado, hallar otro qualquiera lado. (fig. 19.)

EN el triangulo ABC, se suponen conocidos los angulos B 50. grad. 15. min. y C 35. gr. 20. min. y el lado CA 448. pies. Pidese el lado AB.

Proporcion, prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno del angulo B,	50. gr. 15. min. C.L.	0.1141630.
al lado opuesto CA;	448.	2.6512780.
assi el seno del angulo C,	35. gr. 20. min.	9.7621775.
al lado opuesto AB.	337.	2.5276185.

De la misma suerte se hallarà el lado BC, formando la proporcion en esta forma: Como el seno del angulo B, al lado opuesto CA; assi el seno del angulo A, al lado opuesto BC.

PROP. XVII. Problema.

Dados dos lados, y el angulo intermedio, hallar el tercer lado. (fig. 15.)

EN el triangulo obliquangulo ABC, el angulo A es de 61. gr. 16. min. el lado AC 400. pies; y el lado AB 300. Pidese el lado BC.

Operacion. Hallese primeramente el angulo B, (14.) y por la antecedente se hallarà el lado BC.

PROP. XVIII. Problema.

En el triangulo obliquangulo, dados dos lados, y uno de los angulos opuestos, hallar el otro lado. (fig. 14.)

EN el triangulo ABC, dados los lados BA, AC, y el angulo B, se pide el lado BC.

Operacion. Halleſe primero el angulo A, (13.) y ſe hallarà el lado BC por la *prop.* 16. diciendo: Como el ſeno del angulo B, al lado opueſto AC; aſsi el ſeno del angulo A, al lado opueſto BC.

LIBRO IV.

ISAGOGICO PARA LA RESOLUcion de los triangulos esfericos, ò curvilineos.

ESta parte de Trigonometria, llamada *esferica*, ò *curvilinea*, es de grande utilidad en la Mathematica, ſingularmente para los tratados de Esfera, Geographia, Nautica, Horologiographia, y Aſtronomia: ſu empleo es unicamente la analiſi, ò reſolucion de los triangulos curvilineos esfericos, formados en la ſuperficie de una esfera con tres arcos de circulo maximo: de que ſe ſigue, que ni el triangulo formado en una ſuperficie plana con tres arcos de circulo, ni el deſcrito en una ſuperficie esferica con tres arcos de circulos menores, ſon objeto de eſta Trigonometria. Para ſu inteligencia es meneſter la noticia de algunos theoremas elementares de la esfera, que demonſtrarè en eſte libro, para que no tenga neceſsidad el lector de recurrir à los esfericos de Theodoſio, y Menelao.

DEFINICIONES.

1 *Circulo maximo en la esfera es aquel, cuyo plano paſſa por el centro de la esfera.* Y por conſiguiente, el centro de eſte circulo es el miſmo centro de la esfera; y el diametro del circulo maximo es tambien diametro de la esfera: y como el diametro ſea la mayor linea recta que ſe puede acomodar dentro de la esfera, el circulo que tiene eſſe miſmo diametro, es el mayor de los que puede haver en la esfera, aunque puede tener infinitos iguales; y por eſſo ſe llama *circulo maximo*; à diſtincion de otros circulos, que ſiendo ſu diametro menor que el de la esfera, neceſſariamente han de ſer menores; y tanto menores, quanto mas ſe apartan ſus planos del centro de la esfera.

2 *Polos de un circulo maximo, ſon aquellos puntos pueſtos en la ſuperficie de la esfera, que diſtan igualmente de los puntos de la periferia de dicho circulo*; y por conſiguiente, todos los arcos de circulo maximo comprehendidos entre qualquiera de los polos, y la circunferencia del circulo ſobredicho ſon iguales, y de 90. gr. como en la *fig.* 20. El circulo AECFA es *maximo*, por paſſar ſu plano por el centro G de la esfera; y los puntos B, y D ſon ſus polos, porque los arcos BA, BE, BC, BF, como tambien DA, DE, DC, DF ſon quadrantes de circulos maximos, que conſtan de 90. grad. y por conſiguiente ſon iguales. De que ſe ſigue, que qualquiera circulo maximo divide la esfera en dos partes iguales, llamadas *emisferios*.

3 *Angulo esferico, es el que ſe forma en la ſuperficie de la esfera con dos arcos de circulo maximo.* Eſte angulo es igual al de la inclinacion de los planos de los circulos ſobredichos; y ſu medida es el arco de otro circulo maximo intercepto entre ellos, que tiene ſu polo en el concurſo, ò punto angular. Como en la *fig.* 20. BAE es un angulo esferico formado de los arcos BA, EA, que lo ſon de los circulos maximos ABCD, AECF, cuyos planos tienen por ſeccion comun la linea, ò diametro AC. Del miſmo centro G ſalgan dos perpendiculares à la miſma AC, cada una en el plano de ſu circulo, eſto es, GB en el plano del circulo ABCD, y GE en el plano del circulo AECF, y ſerà el angulo esferico BAE, igual al angulo rectilineo BGE, y de tantos grados quantos tiene el arco BE, cuyo polo es el punto A, ò C del concurſo de dichos circulos.

4 Los ſenos, tangentes, y ſecantes de los angulos esfe-