Operacion. Halleſe primero el angulo A, (13.) y ſe hallarà el lado BC por la *prop.* 16. diciendo: Como el ſeno del angulo B, al lado opueſto AC; aſsi el ſeno del angulo A, al lado opueſto BC.

LIBRO IV.

ISAGOGICO PARA LA RESOLUcion de los triangulos esfericos, ò curvilineos.

ESta parte de Trigonometria, llamada *esferica*, ò *curvilinea*, es de grande utilidad en la Mathematica, ſingularmente para los tratados de Esfera, Geographia, Nautica, Horologiographia, y Aſtronomia: ſu empleo es unicamente la analiſi, ò reſolucion de los triangulos curvilineos esfericos, formados en la ſuperficie de una esfera con tres arcos de circulo maximo: de que ſe ſigue, que ni el triangulo formado en una ſuperficie plana con tres arcos de circulo, ni el deſcrito en una ſuperficie esferica con tres arcos de circulos menores, ſon objeto de eſta Trigonometria. Para ſu inteligencia es meneſter la noticia de algunos theoremas elementares de la esfera, que demonſtrarè en eſte libro, para que no tenga neceſsidad el lector de recurrir à los esfericos de Theodoſio, y Menelao.

DEFINICIONES.

1 CIrculo maximo en la esfera es aquel, cuyo plano paſſa por el centro de la esfera.* Y por conſiguiente, el centro de eſte circulo es el miſmo centro de la esfera; y el dia-

diametro del circulo maximo es tambien diametro de la esfera: y como el diametro ſea la mayor linea recta que ſe puede acomodar dentro de la esfera, el circulo que tiene eſſe miſmo diametro, es el mayor de los que puede haver en la esfera, aunque puede tener infinitos iguales; y por eſſo ſe llama *circulo maximo*; à diſtincion de otros circulos, que ſiendo ſu diametro menor que el de la esfera, neceſſariamente han de ſer menores; y tanto menores, quanto mas ſe apartan ſus planos del centro de la esfera.

2 *Polos de un circulo maximo, ſon aquellos puntos pueſtos en la ſuperficie de la esfera, que diſtan igualmente de los puntos de la periferia de dicho circulo*; y por conſiguiente, todos los arcos de circulo maximo comprehendidos entre qualquiera de los polos, y la circunferencia del circulo ſobredicho ſon iguales, y de 90. gr. como en la *fig.* 20. El circulo AECFA es *maximo*, por paſſar ſu plano por el centro G de la esfera; y los puntos B, y D ſon ſus polos, porque los arcos BA, BE, BC, BF, como tambien DA, DE, DC, DF ſon quadrantes de circulos maximos, que conſtan de 90. grad. y por conſiguiente ſon iguales. De que ſe ſigue, que qualquiera circulo maximo divide la esfera en dos partes iguales, llamadas *emisferios*.

3 *Angulo esferico, es el que ſe forma en la ſuperficie de la esfera con dos arcos de circulo maximo.* Eſte angulo es igual al de la inclinacion de los planos de los circulos ſobredichos; y ſu medida es el arco de otro circulo maximo intercepto entre ellos, que tiene ſu polo en el concurſo, ò punto angular. Como en la *fig.* 20. BAE es un angulo esferico formado de los arcos BA, EA, que lo ſon de los circulos maximos ABCD, AECF, cuyos planos tienen por ſeccion comun la linea, ò diametro AC. Del miſmo centro G ſalgan dos perpendiculares à la miſma AC, cada una en el plano de ſu circulo, eſto es, GB en el plano del circulo ABCD, y GE en el plano del circulo AECF, y ſerà el angulo esferico BAE, igual al angulo rectilineo BGE, y de tantos grados quantos tiene el arco BE, cuyo polo es el punto A, ò C del concurſo de dichos circulos.

4 Los ſenos, tangentes, y ſecantes de los angulos esfe-

fericos, son las mismas que en los rectilineos; solo que los senos estàn incluidos dentro de la esfera; y assi, qualquiera radio, como EG, es el seno total, ù del quadrante AE: y la recta HI, perpendicular al radio GE, es el seno recto del arco IE; y assi de los demàs.

CAPITULO I.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS CIRCULOS MAXIMOS, y angulos esfericos.

PROP. I. Theorema.

Dos circulos maximos se cortan en dos partes iguales. (fig. 20.)

LOs dos circulos maximos ABCD, AECF, se cortan en los puntos A, y C. Digo, que ABC, CDA, como tambien AEC, CFA, son semicirculos.

Demonstr. Por estar el centro G en el plano de los dos circulos sobredichos, (*defin.* 1.) necessariamente està en la comun seccion AC de sus planos: luego G es centro comun de entrambos circulos: luego la recta AGC, que passa por el centro, serà diametro; y ABC, AEC, &c. semicirculos.

PROP. II. Theorema.

Los circulos maximos que se cortan, hacen los dos angulos vecinos, ò rectos, ò iguales à dos rectos. (fig. 20.)

LOs circulos ABCD, AECF, se cortan en A, y forman los angulos vecinos BAE, EAD. Digo, que estos dos angulos, ò son rectos, ò juntos, son tanto como dos rectos.

Demonstr. Los sobredichos angulos son iguales (*defin.* 3.) à los angulos rectilineos BGE, EGD; pero estos, (13. 1. Eucl.) ò son rectos, ò tanto como dos rectos: luego tambien los angulos BAE, EAD.

CO-

COROLARIO.

DE aqui se sigue, que todos los angulos que forman los circulos maximos en uno de los puntos en que se cortan, son tanto como quatro rectos.

PROP. III. Theorema.

Los angulos esfericos, verticalmente opuestos, son iguales. (fig. 20.)

LOs angulos BAE, FAD, son verticalmente opuestos. Digo, que son iguales. *Demonstr.* El angulo BAE, es igual al angulo rectilineo BGE; y el angulo FAD, al angulo FGD; pero estos (15. 1. Eucl.) son iguales: luego tambien aquellos.

PROP. IV. Theorema.

Los angulos opuestos, que distan entre sì todo un semicirculo, son iguales. (fig. 20.)

LOs angulos BAE, BCE, distan entre sì todo el semicirculo ABC. Digo, que son iguales, porque entrambos lo son al mismo angulo rectilineo BGE, y por consiguiente lo han de ser entre sì.

PROP. V. Theorema.

El angulo que forman dos circulos maximos, es igual à la distancia de sus polos; y al contrario. (fig. 21.)

SEan los circulos maximos LSM, LQM, cuyos polos son los puntos P, y O, y el angulo esferico que forman es SLQ, cuya medida es el arco SQ. Digo, que este arco es igual al arco OP, que es la distancia de sus polos.

Demonstr. El quadrante OQ, comprehendido entre O, polo del circulo LQM, y su circunferencia, es igual al quadrante PS, comprehendido entre P, polo del circulo LSM, y su circunferencia: luego, quitando el arco OS, que es comun à entrambos, quedarà el arco SQ, igual à PO, distancia de los polos.

PROP.

PROP. VI. Theorema.

El circulo maximo, que passa por los polos de otro circulo maximo, tiene en este sus polos, y hace con èl angulos rectos; y al contrario. (fig. 21.)

SEa el circulo LQMV, cuyo polo es O, por el qual passa el circulo VOQ, aunque en la figura se representa con linea recta. Digo, que el polo del circulo VOQ, necessariamente està en el circulo LQMV; y que los angulos que se forman en las intersecciones V, y Q, son rectos. Dividase el semicirculo VLQ, por medio en L, y descrivase por L el circulo maximo LOM.

Demonstr. El arco OL, comprehendido entre el polo O, y la circunferencia del circulo VLQM, es quadrante; (*defin.* 2.) y siendo por construccion LU, LQ, quadrantes iguales, serà L polo del circulo UOQ, el qual punto L, està en la circunferencia ULQ. Tambien siendo L polo del circulo VOQ, y O, polo del VLQ. serà LO la distancia de sus polos; y siendo èsta igual al angulo LVO, (5.) que forman dichos circulos, la qual distancia es quadrante, serà el angulo LVO, recto: lo mismo dirè de LQO, QMO, MVO.

Al contrario, si los angulos en V, y Q, son rectos, la distancia LO de sus polos serà de 90. gr. luego el circulo VOQ, passarà por el punto O, que es polo del circulo VLQ; y èste passarà por el punto L, polo de VOQ.

COROLARIOS.

1 *DE lo dicho se infiere, que solo aquel arco de circulo maximo puede ser perpendicular à un otro circulo que passa por los polos de èste, porque siendo perpendicular el uno al otro, han de tener en si mutuamente sus polos: luego el que no passa por los polos, no puede ser perpendicular.*

2 *Si por un punto distinto del polo de un circulo, se descriven diferentes circulos maximos, solo aquel serà perpendicular à dicho circulo, que passarà por su polo.*

3 *El perpendiculo que desciende à un arco, de un punto que no es polo de dicho arco, ò es mayor, ò menor que quadrante, como se vè en la fig. 21. donde el perpendiculo PV, que baxa del punto P, distinto del polo O, es menor que el quadrante OV; y el perpendiculo PQ, es mayor que el quadrante OQ.*

CAPITULO II.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS *esfericos en comun.*

TRiangulo esferico, como ya dixe, es el que en la superficie de la esfera forman tres arcos de circulo maximo: sus especies tienen la misma denominacion que los triangulos planos rectilineos; esto es, el que tiene un angulo recto, se llama *rectangulo*; el que un angulo obtuso, *obtusangulo*; y el que tiene los tres angulos agudos, se llama *acutangulo*. Assimismo, si tiene tres lados iguales, se llama *equilatero*; si dos iguales, *isosceles*; si los tres son desiguales, *escaleno*; y el que no siendo rectangulo tuviere à lo menos un lado que sea quadrante, se llama *quadrantal*.

PROP. VII. Theorema.

Qualquiera lado de un triangulo esferico, es menor que el semicirculo. (fig. 22.)

SEa el triangulo esferico ABC. Digo, que qualquier lado suyo es menor que el semicirculo.

Demonstr. Continuense AB, AC, hasta que concurran en D, y seràn (1.) los arcos ABD, ACD semicirculos: luego tanto AB, como AC, son menores que el semicirculo. Lo mismo se demonstrarà de BC.

PROP. VIII. Theorema.

Qualesquiera dos lados de un triangulo esferico son mayores que el otro. (fig. 22.)

DEmuestrase como la *prop.* 20. del *lib.* 1. de la *Geom. Elem.* porque la distancia mas breve que hay en la su-