PROP. VI. Theorema.

*El circulo maximo, que passa por los polos de otro circulo maximo, tiene en este sus polos, y hace con èl angulos rectos; y al contrario. (fig. 21.)*

SEa el circulo LQMV, cuyo polo es O, por el qual passa el circulo VOQ, aunque en la figura se representa con linea recta. Digo, que el polo del circulo VOQ, necessariamente està en el circulo LQMV; y que los angulos que se forman en las intersecciones V, y Q, son rectos. Dividase el semicirculo VLQ, por medio en L, y descrivase por L el circulo maximo LOM.

*Demonstr.* El arco OL, comprehendido entre el polo O, y la circunferencia del circulo VLQM, es quadrante; (*defin.* 2.) y siendo por construccion LU, LQ, quadrantes iguales, serà L polo del circulo UOQ, el qual punto L, està en la circunferencia ULQ. Tambien siendo L polo del circulo VOQ, y O, polo del VLQ, serà LO la distancia de sus polos; y siendo èsta igual al angulo LVO, (5.) que forman dichos circulos, la qual distancia es quadrante, serà el angulo LVO, recto: lo mismo dirè de LQO, QMO, MVO.

Al contrario, si los angulos en V, y Q, son rectos, la distancia LO de sus polos serà de 90. gr. luego el circulo VOQ, passarà por el punto O, que es polo del circulo VLQ; y èste passarà por el punto L, polo de VOQ.

COROLARIOS.

1 *DE lo dicho se infiere, que solo aquel arco de circulo maximo puede ser perpendicular à un otro circulo que passa por los polos de èste, porque siendo perpendicular el uno al otro, han de tener en si mutuamente sus polos: luego el que no passa por los polos, no puede ser perpendicular.*

2 *Si por un punto distinto del polo de un circulo, se descriven diferentes circulos maximos, solo aquel serà perpendicular à dicho circulo, que passarà por su polo.*

3 *El perpendiculo que desciende à un arco, de un punto que no es polo de dicho arco, ò es mayor, ò menor que quadrante, como se vè en la fig. 21. donde el perpendiculo PV, que baxa del punto P, distinto del polo O, es menor que el quadrante OV; y el perpendiculo PQ, es mayor que el quadrante OQ.*



## CAPITULO II.

### DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos en comun.

TRiangulo esferico, como ya dixe, es el que en la superficie de la esfera forman tres arcos de circulo maximo: sus especies tienen la misma denominacion que los triangulos planos rectilineos; esto es, el que tiene un angulo recto, se llama *rectangulo*; el que un angulo obtuso, *obtusangulo*; y el que tiene los tres angulos agudos, se llama *acutangulo*. Assimismo, si tiene tres lados iguales, se llama *equilatero*; si dos iguales, *isosceles*; si los tres son desiguales, *escaleno*; y el que no siendo rectangulo tuviere à lo menos un lado que sea quadrante, se llama *quadrantal*.

PROP. VII. Theorema.

*Qualquiera lado de un triangulo esferico, es menor que el semicirculo. (fig. 22.)*

SEa el triangulo esferico ABC. Digo, que qualquier lado suyo es menor que el semicirculo.

*Demonstr.* Continuense AB, AC, hasta que concurran en D, y seràn (1.) los arcos ABD, ACD semicirculos: luego tanto AB, como AC, son menores que el semicirculo. Lo mismo se demonstrarà de BC.

PROP. VIII. Theorema.

*Qualesquiera dos lados de un triangulo esferico son mayores que el otro. (fig. 22.)*

DEmuestrase como la *prop.* 20. del *lib.* 1. de la *Geom. Elem.* porque la distancia mas breve que hay en la su-

ſuperficie de la esfera del punto A, al punto C, es el arco AC de circulo maximo: luego otra qualquiera ABC, es mayor: luego eſtos dos lados juntos ſon mayores que AC.

## PROP. IX. Theorema.

*En qualquiera triangulo esferico, los tres lados juntos ſon menores que un circulo entero. (fig. 22.)*

DIgo, que en el triangulo ABC, los tres lados juntos ſon menores que un circulo entero: continuenſe los lados AB, AC, haſta que concurran en D.

*Demonſtr.* Por la antecedente en el triangulo BDC, los dos lados BD, CD juntos, ſon mayores que BC: luego ABD, ACD, ſon mayores que AB, AC, BC; y ſiendo ABD, ACD ſemicirculos, ſeràn los dos ſemicirculos mayores que los tres lados ſobredichos: luego eſtos ſon menores que un circulo entero.

## PROP. X. Theorema.

*Si dos triangulos esfericos tienen entre sì los tres lados uno por uno iguales, ò tienen dos lados iguales, y el angulo comprehendido en los dichos lados tambien igual, los triangulos ſeràn totalmente iguales.*

DEmueſtraſe como las *propoſiciones* 4. *y* 8. del *lib.* I. de la *Geom. Elem.* y aſsi, no es meneſter repetir la demonſtracion.

## PROP. XI. Theorema.

*Los triangulos esfericos, cuyos tres angulos del uno fueren de por sì iguales à los tres del otro, tendràn tambien los lados mutuamente iguales. (fig. 23.)*

EN èſtas, y otras propoſiciones ſemejantes, ſe ſuponen formados los triangulos en una miſma, ò igual esfera. Supongamos pues, que los triangulos ABC, DEF, tienen entre sì los angulos iguales; eſto es, B igual à E; A igual à D; y C à F. Digo, que tambien los lados del uno ſon iguales à los del otro.

De-



*Demonſtr.* Por ſer el angulo D igual al angulo A, ſobrepueſto à èſte, ſe ajuſtarà con èl; y por conſiguiente el lado DE caerà ſobre AB; y el lado DF, ſobre AC: eſto ſupueſto, ò entrambos lados DE, DF, ſe ajuſtan ſobre los AB, AC, de ſuerte, que el punto E cayga ſobre B, y el punto F, ſobre C; y en eſte caſo tambien la baſa EF ſe ajuſtaria ſobre BC, y quedava probada la igualdad de los tres lados del uno, à los tres del otro que ſe pretende, ò alguno de los dichos lados ſe ajuſta en la forma dicha, ò ninguno de ellos.

1 Supongamos, que el lado DE es mas corto que AB; y aſsi, que el punto E cayga ſobre H, ajuſtandoſe DF ſobre AC, tireſe el arco HC. Los triangulos HAC, EDF, por tener los lados AH, AC iguales à los lados DE, DF; y el angulo comprehendido A, igual à D, (10.) ſon del todo iguales: luego el angulo ACH, es igual al angulo F: luego tambien ſerà igual al angulo ACB, que ſe ſupone igual à F, la parte al todo que es impoſsible: luego el punto E no puede venir ſobre H, ni ſobre otro punto entre A, y B.

2 Supongaſe, que el lado DE ſea mayor que AB, y que el punto E cayga ſobre I, cayendo el punto F ſobre C: tireſe el arco IC; ſegun eſta ſupoſicion, los triangulos IAC, EDF, tienen los lados AI, AC, iguales à los DE, DF; y el angulo A, igual à D: luego ſon totalmente iguales, y el angulo ACI ſerà igual al angulo F; y ſiendo por ſupoſicion ACB igual à F, ſerà ACI igual al angulo ACB, el todo à la parte que es impoſsible: luego tambien lo es, que el lado DE ſea mayor que AB.

3 Supongamos, que los dos lados DE, DF ſean mas cortos que AB, y AC; y aſsi, que hecha la ſuperpoſicion, venga el punto E en H, y F en L: tireſe el lado HL: en eſte caſo el triangulo HAL ſeria tambien totalmente igual al triangulo EDF, por tener los lados AH, AL, iguales à los DE, DF; y el angulo A, igual à D: luego el angulo AHL es igual à E, y ALH, à F; y por conſiguiente AHL es igual à B, y ALH à ACB, lo que es impoſsible, porque para eſſo era meneſter fueſſen los lados HL, BC paralelos, lo que no puede ſer por ſer arcos de circulos maximos, que neceſ-

cessariamente (1.) se cortan: luego los lados DE, DF no pueden ser mas cortos que los AB, AC. Lo mismo se demonstraria, si se dixesse, que eran mas largos: luego ni entrambos, ni ninguno de ellos pueden ser mayores, ni menores: luego los tres del un triangulo se ajustan à los tres del otro: luego son iguales.

PROP. XII. Theorema.

*Si dos triangulos esfericos tienen dos angulos del uno iguales à dos del otro; y el lado adyacente à essos angulos tambien igual, los triangulos serà totalmente iguales. (fig. 23.)*

LOs triangulos ABC, DEF tienen los angulos B, y E; C, y F iguales, como tambien los lados BC, EF adyacentes à dichos angulos. Digo, que son totalmente iguales.

*Demonstr.* Si EF se pone sobre BC se ajustaràn por ser iguales; y por ser iguales los angulos F, y C, el lado FD, caerà sobre CA; y por la misma razon ED caerà sobre BA: luego el punto D caerà sobre A, y todo el un triangulo se ajustarà sobre el otro: luego son totalmente iguales.

PROP. XIII. Theorema.

*En el triangulo esferico Isoceles, los angulos sobre la basa son iguales, como tambien los que alargados los lados, se forman debaxo de ella; y si los angulos sobre la basa son iguales, el triangulo es Isoceles.*

ESta proposicion se demuestra como la 5. y 6. del *lib.* 1. de la *Geomet. Element.* y assi no es menester repetir la demonstracion; infierese de aqui, que el triangulo equilatero es equiangulo.

PROP. XIV. Theorema.

*En el triangulo esferico al mayor angulo, se le opone mayor lado; y al mayor lado, mayor angulo. (fig. 23.)*

EN el triangulo esferico HIL, el angulo HLI es mayor que el angulo I. Digo, que el lado IH, opuesto à dicho



cho mayor angulo, es mayor que el lado LH, opuesto al angulo menor I. Hagase el angulo ILK igual al angulo I.

*Demonstr.* Por ser los angulos ILK, y I, iguales, serà el triangulo LKI Isoceles, (13.) y los lados IK, KL iguales; y añadiendo à entrambos el mismo KH, seràn los lados LK, KH, iguales à IH; pero LK, KH, son mayores que HL: luego IH es mayor que HL. Tambien, supuesto que IH sea mayor que HL, digo, que el angulo ILH es mayor que I, porque ni puede ser igual, ni menor; porque si fuesse igual, los lados IH, HL serian (13.) iguales, contra lo supuesto: si fuesse dicho angulo ILH, menor que I, seria el lado IH menor que HL, segun lo demonstrado, lo que es tambien contra lo supuesto: luego ILH es mayor que el angulo I.

PROP. XV. Theorema.

*Si dos triangulos esfericos tuvieren los dos lados del uno iguales à dos del otro, pero el angulo comprehendido de estos lados fuere mayor en el uno que en el otro, el que tuviere mayor angulo, tendrà mayor basa; y al contrario, el que tuviere mayor basa, tendrà mayor el angulo sobredicho.*

ESta proposicion se demuestra como las 24. y 25. del *lib.* 1. de la Geometr. Elementar; y assi no repito la demonstracion.

PROP. XVI. Theorema.

*En el triangulo esferico BAC (fig. 22.) si los dos lados AB, BC juntos son iguales al semicirculo; prolongada la basa AC hasta D, el angulo externo BCD, serà igual al angulo A interno, y opuesto; y los dos BCA, y A, seràn tanto como dos rectos; y al contrario.*

DEmonstr. El arco ABD (1.) es semicirculo: luego siendo por suposicion AB, BC iguales al semicirculo, seràn iguales al arco ABD; y quitando el arco AB, que es comun, quedaràn BC, y BD iguales: luego (8.) los angulos BCD, y D son iguales; pero el angulo D es igual al angulo A: (4.) luego el angulo externo BCD, es igual al an-

angulo A; y siendo (2.) BCA, y BCD, iguales à dos rectos, tambien BCA, y A seràn iguales à dos rectos.

Y al contrario, si el angulo BCD fuere igual al angulo A; y por consiguiente los angulos BCA, y A fueren tanto como dos rectos, seràn los angulos BCD, y D iguales; y por consiguiente (13.) los lados BD, BC seràn iguales; y los AB, BC juntos, seràn tanto como un semicirculo.

*Digo tambien, que si los lados AB, BC, fueren mas que un semicirculo, el angulo externo BCD, serà menos que el angulo A; y los angulos sobre la basa BCA, y A, mayores que dos rectos; y al contrario.*

*Demonstr.* Por ser AB, BC mas que semicirculo, seràn mayores que ABD; y quitando el comun AB, quedarà BC, mayor que BD: (14.) luego el angulo D, opuesto al mayor lado, serà mayor que el angulo BCD; y siendo el angulo A, igual à D, serà el angulo BCD menor que el angulo A; y siendo BCA, y BCD iguales à dos rectos, seràn BCA, y A mayores que dos rectos.

Y al contrario, si BCD es menor que el angulo A, ò los angulos BCA, y A fueren mas que dos rectos, serà el angulo BCD menor que D; y por consiguiente el lado BC mayor que BD; y como ABD sea semicirculo, los dos AB, BC, seràn mas que semicirculo.

*Ultimamente, si los lados AB, BC, son menos que un semicirculo, el angulo externo BCD serà mayor que el angulo A; y los angulos BCA, y A, sobre la basa, seràn menos que un semicirculo: y al contrario.*

*Demonstr.* Siendo AB, BC menos que semicirculo, seràn menos que el arco ABD: luego BC serà menor que BD; y el angulo BCD serà mayor que D, y por consiguiente mayor que A: y como BCD, con BCA, haga dos rectos, el angulo A, con BCA, seràn menos que dos rectos.

Y al contrario, siendo el externo BCD mayor que el interno A, y por consiguiente A, y BCA menos que dos rectos, serà el angulo BCD mayor que el angulo D: luego el arco BD, mayor que BC: luego AB, BC, seràn menores que el semicirculo ABD.

PROP.



## PROP. XVII. Theorema.

*Dos triangulos esfericos pueden tener dos angulos iguales el uno al otro, cada uno à su correspondiente; y un lado opuesto à dichos angulos iguales, tambien igual, y ser los triangulos desiguales.* (fig. 24.)

Sea el triangulo OPQ, cuyos dos lados OP, OQ, sean iguales al semicirculo; y por consiguiente, sea el angulo externo OQR, (16.) igual al angulo P interno, y opuesto. Tirese el lado OR.

*Demonstr.* Los triangulos ORP, ORQ, son desiguales, por ser èste parte de aquel; pero estos triangulos tienen los angulos P, y OQR iguales; y el angulo R comun; y tambien el lado OR, opuesto à los dichos angulos iguales P, y OQR: luego los triangulos esfericos pueden tener mutuamente dos angulos iguales, y un lado opuesto à los angulos correspondientes igual, y ser desiguales.

## COROLARIO.

*De aqui se colige, que en los triangulos esfericos, dados dos angulos, y un lado opuesto, puede haver ambiguedad en la resolucion: porque si en el caso sobredicho se siguiere la proporcion, que despues diremos; es à saber: Como el seno del angulo OQR, ò P, al seno del angulo R; assi el seno del lado OR, al seno quarto, serà este seno, assi del lado OQ, como de OP, complemento suyo al semicirculo, por ser el seno de qualquier arco, seno tambien de su complemento al semicirculo, como se dixo en la defin. 4. lib. 1. Esta ambiguedad se quitarà sabiendo antes de què especie sea el lado opuesto al angulo R, si ha de ser mayor, ò menor que el quadrante, como consta de la proposicion siguiente.*

PROP.

## PROP. XVIII. Theorema.

*Si dos triangulos esfericos tuvieren dos angulos del uno iguales à dos del otro, y un lado opuesto à uno de dichos angulos igual al lado correspondiente en el otro, y el otro lado opuesto al otro angulo de los iguales, fuere en entrambos de una misma especie, pero no quadrante, los triangulos seràn del todo iguales.* ( *fig.* 25.)

LOs triangulos ABC, DEF, tienen los angulos B, y E iguales, como tambien C, y F; y el lado AC, igual à DF; y los AB, DE, son de una misma especie, pero no quadrantes. Digo, que los triangulos son del todo iguales; y si no lo son, sea BC mayor que EF: cortese pues GC, igual à EF, y tirese AG.

*Demonstr.* Los triangulos AGC, DEF, tienen los lados CA, CG, iguales à DF,FE; y los angulos C, y F, tambien iguales: luego (10.) son totalmente iguales: luego el angulo AGC, es igual à E; y siendo E, y B iguales, serà AGC igual à B: luego (16.) AB,y AG, ò DE su igual,son tanto como un semicirculo;y como se suponga no ser quadrantes, si AB es mayor que quadrante,DE serà menor;y si AB fuere menor,DE serà mayor, contra lo supuesto,por suponerse ser de una misma especie: luego BC es igual à EF, y todo el un triangulo al otro.

## PROP. XIX. Theorema.

*Si dos triangulos esfericos tienen entre si un angulo igual, y los dos lados, que comprehenden un otro angulo, fueren tambien iguales à los dos que le comprehenden en el otro triangulo, seràn totalmente iguales; con tal, que el tercer angulo sea en entrambos de una misma especie; pero no recto.* ( *fig.* 26.)

EN los triangulos ABC, DEF, los angulos B, y E, se suponen iguales; y los lados BC, EF; CA, FD, tambien iguales; y los angulo A, y D, de una misma especie, pero no rectos. Digo, que todo lo demàs es igual. Y si se dixere que AB, es mayor que DE, cortese BG, igual à DE,y tirese el arco CG.



*Demonstr.* Los triangulos GBC, DEF, tienen los dos lados GB, BC, iguales à los dos DE, EF,y el angulo B, igual à E: luego (10.) son del todo iguales: luego los lados CG, DF, son iguales; pero DF, y AC, se suponian iguales: luego CG, y CA seràn iguales: luego (13.) los angulos A, y CGA son iguales; y siendo CGA, y CGB iguales à dos rectos, serà el angulo CGB, ò D su igual, y el angulo A iguales à dos rectos; y como se suponga no ser rectos, si A es mas que recto,D lo serà menos; y al contrario: luego no serian de una misma especie, contra lo supuesto.

## COROLARIO.

D*E aqui se colige, que dados precisamente dos lados, y el angulo opuesto à uno de dichos lados en el triangulo esferico, no se puede llegar à su resolucion, por haver ambiguedad, si que serà menester saber de què especie sea el tercer angulo.*

## PROP. XX. Theorema.

*En los triangulos esfericos Isoceles, si los lados son quadrantes, los angulos sobre la basa son rectos; si son mayores que quadrantes, obtusos; y si menores, agudos; y al contrario.* ( *fig.*27.)

SEa el triangulo isoceles IHL. Digo lo primero, que si los lados HI, HL, son quadrantes, los angulos I, L, son rectos; porque siendo quadrantes,son entrambos juntos iguales à un semicirculo: luego (16.) los angulos I, L, son tanto como dos rectos; y siendo iguales, es forzoso sean angulos rectos: al contrario, si los angulos I, L son rectos, los lados HI, HL (6.) passan por el polo de la basa IL, que es arco de circulo maximo: luego HI, HL, son quadrantes.

Digo lo segundo, que si los lados HI, HL, son mayores que el quadrante, los angulos I, L, son obtusos, porque en esta suposicion seràn (16.) los angulos I, L, mayores que dos rectos; y como sean iguales, es forzoso sean obtusos; al al contrario, siendo obtusos, son entrambos juntos mayores que dos rectos: luego el externo HLM, serà menor que I: luego (16.) los lados HI, HL, juntos son mas que un semicirculo; y como sean iguales, serà cada uno mayor que un quadrante.

Digo lo tercero, que si los lados HI, HL, son menores que el quadrante, los angulos I, L, seràn agudos, porque dichos lados juntos seràn menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo HLM, serà mayor que I; y los dos I, L, juntos, seràn menos que dos rectos; y por ser iguales entrambos, seràn agudos; y al contrario, si dichos angulos son agudos, los dos juntos seràn menos que dos rectos: luego (16.) los lados HI, HL, juntos, son menos que un semicirculo; y siendo iguales, serà qualquiera de ellos menor que el quadrante.

## PROP. XXI. Theorema.

*En qualquiera triangulo esferico, sus tres angulos son mas que dos rectos, y menos que seis.* (*fig.*28.)

Digo lo primero, que en qualquiera triangulo esferico ABC, sus tres angulos juntos, son mas que dos angulos rectos. Prolongado el lado BC, queda formado el angulo externo ACD, el qual es mayor, ò menor, ò igual al angulo interno, y opuesto B, segun lo demonstrado en la *propos.* 16. y en estas tres suposiciones demonstrarè la propuesta.

1 Sea el angulo ACD, igual al angulo B. *Demonst.* Por ser dicho angulo igual al angulo *B*, son (16.) los angulos *B*, y *ACB*, iguales à dos rectos: luego los tres *A*, *B*, *C*, son mas que dos rectos.

2 Sea el angulo *ACD*, menor que *B*: luego si à entrambos se añade el angulo *ACB*, seràn *ACB*, y *B*, mayores que *ACB*, y *ACD*; y siendo èstos iguales à dos rectos, seràn *ACB*, y *B*, mayores que dos rectos: luego los tres *ACB*, *B*, y *A*, seràn con mas razon mayores que dos rectos.

3 Sea *ACD*, mayor que el angulo *B*. Digo, que en esta



ta suposicion tambien son los tres angulos internos mas que dos rectos. Hagase el angulo ECD igual al angulo B, y continuese BA hasta que concurra con CE. Esto supuesto, por ser el angulo externo ECD, igual al interno B, los lados EB, EC, (16.) seràn iguales à un semicirculo: luego EC, EA seràn menos que un semicirculo: luego (16.) el angulo externo FAE, y por consiguiente su vertical opuesto BAC, serà mayor que ACE; y añadiendo à entrambos el angulo ACB, seràn el angulo BAC, y el ACB mayores que ACE, y ACB; y añadiendo à los BAC, y ACB el angulo B; y à los ACE, y ACB el angulo ECD, que por construccion son iguales, seràn los tres BAC, ACB, y B, mayores que los tres ACB, ACE, y ECD; y siendo estos tres tanto como dos rectos, seràn los otros tres mayores que dos rectos.

Digo lo segundo, que en qualquier triangulo esferico ABC, (*fig.*29.) sus tres angulos son menos que seis rectos: prolonguense los tres lados, como se ve en la figura. *Demonstr.* Los dos angulos DAC, CAB, son tanto como dos rectos; (2.) y assimismo los otros dos BCA, BCF, como tambien EBA, ABC: luego los tres angulos internos, con los tres externos, hacen seis rectos: luego los tres internos solos son menos que seis rectos.

## COROLARIO.

*De lo dicho se colige, que en qualquier triangulo esferico el angulo externo es menor que los dos internos, y opuestos, porque el externo con el interno, que està à su lado, hace solamente dos rectos; y los dos internos, y opuestos, con el interno sobredicho, hacen mas que dos rectos: luego el externo es menor que los dos internos opuestos.*

## PROP. XXII. Theorema.

*Un triangulo esferico puede constar de tres angulos rectos; de dos rectos, y un obtuso; de dos obtusos, y un recto; y de tres obtusos.* (*fig.*30.)

En el triangulo EAD, los tres angulos E, A, D, son rectos; y en este caso los tres lados son quadrantes. En el el triangulo EAS, los angulos E, y S son rectos, y el angulo EAS obtuso, por ser mayor que el recto EAD; y en este caso los lados AE, AS son quadrantes, y ES mayor que quadrante. En el triangulo MAN, los angulos M, y N son obtusos, y el MAN recto. En el triangulo MAO, los tres son obtusos; y en estos dos ultimos casos puede haver variedad en los lados. Consta bastantemente de lo dicho.

## PROP. XXIII. Theorema.

*En qualquiera triangulo esferico, si se continuan los lados, se forma otro triangulo, cuya basa, y angulo opuesto à la basa son los mismos del primero, pero las demàs partes del segundo son complemento de las del primero al semicirculo.* (*fig.* 22.)

EN el triangulo ABC continuense los lados AB, AC hasta que concurran en D. Digo, que se forma un otro triangulo BDC, cuya basa BC es la misma del primero; y el angulo D opuesto à la dicha basa, es igual al angulo A, opuesto à la misma, como consta de la *prop.* 4. Digo tambien, que el angulo CBD es complemento del angulo CBA al semicirculo, por ser entrambos iguales à dos rectos; (2.) y por la misma razon es el angulo BCD complemento del angulo BCA al semicirculo: assimismo el lado BD es complemento de AB al semicirculo ABD, (1.) como tambien CD es complemento de AC.

## PROP. XXIV. Theorema.

*Dado qualquiera triangulo, en los polos de sus arcos se forma otro segundo, que sus dos lados son iguales à los dos angulos del primero, cada uno al suyo; y el tercer lado es complemento del tercer angulo al semicirculo; y lo mismo es de los angulos del segundo con los lados del primero.* (*fig.* 31.)

LOs puntos Y, O, son polos del lado AB; y Z, M, del lado AC; y el punto R es polo del lado BC, quedando su correspondiente à la otra parte de la esfera: y tirados los arcos YRO, ZRM, quedan formados de los polos sobre-



bredichos quatro triangulos, que son YRZ, RZO, YRM, MRO, y otros tantos à la otra parte de la esfera. Digo pues, que en el triangulo YRZ, los lados YR, RZ, son iguales à los angulos ABC, ACB, y el lado YZ es complemento al semicirculo del angulo BAC.

*Demonstr.* Los quadrantes YQ, RP son iguales: luego quitando RQ, que es comun, quedarà YR igual à QP, valor, y medida del angulo ABC. Assimismo los quadrantes ZS, RN son iguales: luego quitado RS comun, quedarà ZR igual à SN, medida del angulo ACB. Tambien los quadrantes YX, ZI son iguales: luego añadiendo à entrambos XZ comun, serà YZ, igual à XI, medida del angulo externo XAI, complemento del angulo BAC al semicirculo: luego es constante la propuesta en el triangulo YRZ.

Lo mismo se verifica en el triangulo ZRO, porque ZR es igual, como queda probado, à SN, medida del angulo ACB; y quitando OI de los quadrantes ZI, OH, queda OZ igual à IH, medida del angulo BAC; y RO es complemento al semicirculo de RY, ù de QP su igual, medida del angulo ABC. Consta pues lo sobredicho en este triangulo.

Tambien se demonstrarà lo mismo en el triangulo YRM, esto es, que YR es igual à QP, medida del angulo ABC; y YM igual à HI, medida del angulo BAC; y RM, complemento al semicirculo de RZ, ù de NS su igual, que es medida del angulo ACB: luego generalmente siempre se halla un segundo triangulo, que sus dos lados son iguales à qualesquiera dos angulos del primero; y el tercer lado del segundo es complemento al semicirculo del tercer angulo del primero. Lo que sucede en el triangulo MRO, se verà en la prop. siguiente.

## COROLARIO.

*DE aqui se colige, que dado para resolver qualquiera triangulo esferico, nos podrèmos valer para la resolucion de un otro triangulo equipolente, suponiendo ser qualesquiera dos de sus lados iguales à dos angulos del primero; y que el otro sea el complemento del tercer angulo al semicirculo.*

PROP.

### PROP. XXV. Theorema.

*Dado qualquiera triangulo en los polos de sus arcos, se forma otro segundo, que sus tres lados son complementos al semicirculo de los tres angulos del primero; y los tres angulos del segundo de los tres lados del primero. (fig. 31.)*

DIgo, que en el triangulo ABC, si se toman los polos R de BC, y M de AC, y O de AB, se forma el triangulo MRO, que tiene las calidades propuestas.

*Demonstr.* El lado MR es complemento de RZ, que es igual à NS, medida del angulo ACB; y RO es complemento de RY, que es igual à QP, medida del angulo ABC, y MO es complemento de OZ, que como consta de la antecedente es igual à HI, medida del angulo BAC: luego los tres lados de MRO, son complementos al semicirculo de los tres angulos A, B, C.

Tambien por ser CS, AT quadrantes, quitado el comun AS, queda ST igual à AC; y siendo IS medida del angulo M, y complemento al semicirculo de ST, ù de su igual AC, serà el angulo M, complemento del lado AC al semicirculo. Por la misma razon, siendo QH medida del angulo O, y complemento de QX, ò AB su igual, es el angulo O complemento del lado AB al semicirculo. Ultimamente, si de los quadrantes ED, NC se quita el comun ND, quedan EN, y DC iguales; y assimismo, si de los quadrantes FD, PB se quita DP, quedan FP, y DB iguales: luego EN, y FP juntos son iguales al lado BC. Siendo pues NP complemento de los EN, FP al semicirculo, serà NP complemento del lado BC; y siendo dicho NP medida del angulo R, serà este angulo complemento al semicirculo del sobredicho lado BC: luego los tres angulos del triangulo RMO son complementos de los tres lados de ABC al semicirculo.

### COROLARIO.

*DE aqui se infiere, que dado para resolver un triangulo esferico, nos podrèmos valer de un otro triangulo equipolente, mudando solamente los lados del dado en angulo, ò sus angulos en lados.*



## CAPITULO III.

### DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos rectangulos.

### PROP. XXVI. Theorema.

*En el triangulo rectangulo, si se alarga uno de sus lados hasta el polo del otro lado, se forma otro triangulo que tiene un lado comun con el primero; y las demàs partes, ò iguales con las del primero, ò que son complemento suyo al semicirculo, ò al quadrante. (fig. 32.)*

SEa el triangulo LMN, rectangulo en M; continuese el lado ML, hasta O, polo del otro lado MN, y tirese el lado ON. Digo, que el triangulo OLN, que se ha formado, tiene todos sus lados, y angulos, ò iguales con los del triangulo LMN, ò que son complementos de dichos lados, y angulos al semicirculo, ò al quadrante.

*Demonstr.* 1. La basa LN, es comun à entrambos triangulos. 2. El lado ON, es quadrante, y por consiguiente igual al angulo M, que es recto. 3. El angulo O, es igual al lado MN, por ser èste medida del angulo formado en O, que es polo de MN. 4. El angulo OLN, es complemento del angulo MLN, al semicirculo. (2.) 5. El lado LO, es complemento del lado ML, al quadrante. 6. El angulo ONM, es recto: (6.) luego el angulo ONL, es complemento à 90. grados del angulo LNM: luego las seis partes del triangulo LON, corresponden à las del otro triangulo, en la forma dicha.

### COROLARIO.

*DE aqui se colige, haver las mismas correspondencias en el triangulo quadrantal, ò que siendo obliquangulo, tiene un lado igual al quadrante, como OLN, que en el triangulo rectangulo; porque si el lado OL, que no es quadrante, se alarga hasta que lo sea, y se tira la basa MN, se hallarà todo lo sobredicho.*

PROP.