PROP. XXV. Theorema.

Dado qualquiera triangulo en los polos de sus arcos, se forma otro segundo, que sus tres lados son complementos al semicirculo de los tres angulos del primero; y los tres angulos del segundo de los tres lados del primero. (fig. 31.)

DIgo, que en el triangulo ABC, si se toman los polos R de BC, y M de AC, y O de AB, se forma el triangulo MRO, que tiene las calidades propuestas.

Demonstr. El lado MR es complemento de RZ, que es igual à NS, medida del angulo ACB; y RQ es complemento de RY, que es igual à QP, medida del angulo ABC, y MO es complemento de OZ, que como consta de la antecedente es igual à HI, medida del angulo BAC: luego los tres lados de MRO, son complementos al semicirculo de los tres angulos A, B, C.

Tambien por ser CS, AT quadrantes, quitado el comun AS, queda ST igual à AC; y siendo IS medida del angulo M, y complemento al semicirculo de ST, ù de su igual AC, serà el angulo M, complemento del lado AC al semicirculo. Por la misma razon, siendo QH medida del angulo O, y complemento de QX, ò AB su igual, es el angulo O complemento del lado AB al semicirculo. Ultimamente, si de los quadrantes ED, NC se quita el comun ND, quedan EN, y DC iguales; y assimismo, si de los quadrantes FD, PB se quita DP, quedan FP, y DB iguales: luego EN, y FP juntos son iguales al lado BC. Siendo pues NP complemento de los EN, FP al semicirculo, serà NP complemento del lado BC; y siendo dicho NP medida del angulo R, serà este angulo complemento al semicirculo del sobredicho lado BC: luego los tres angulos del triangulo RMO son complementos de los tres lados de ABC al semicirculo.

COROLARIO.

DE aqui se infiere, que dado para resolver un triangulo esferico, nos podrèmos valer de un otro triangulo equipolente, mudando solamente los lados del dado en angulo, ò sus angulos en lados.

CAPITULO III.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos rectangulos.

PROP. XXVI. Theorema.

En el triangulo rectangulo, si se alarga uno de sus lados hasta el polo del otro lado, se forma otro triangulo que tiene un lado comun con el primero; y las demàs partes, ò iguales con las del primero, ò que son complemento suyo al semicirculo, ò al quadrante. (fig. 32.)

SEa el triangulo LMN, rectangulo en M; continuese el lado ML, hasta O, polo del otro lado MN, y tirese el lado ON. Digo, que el triangulo OLN, que se ha formado, tiene todos sus lados, y angulos, ò iguales con los del triangulo LMN, ò que son complementos de dichos lados, y angulos al semicirculo, ò al quadrante.

Demonstr. 1. La basa LN, es comun à entrambos triangulos. 2. El lado ON, es quadrante, y por consiguiente igual al angulo M, que es recto. 3. El angulo O, es igual al lado MN, por ser èste medida del angulo formado en O, que es polo de MN. 4. El angulo OLN, es complemento del angulo MLN, al semicirculo. (2.) 5. El lado LO, es complemento del lado ML, al quadrante. 6. El angulo ONM, es recto: (6.) luego el angulo ONL, es complemento à 90. grados del angulo LNM: luego las seis partes del triangulo LON, corresponden à las del otro triangulo, en la forma dicha.

COROLARIO.

DE aqui se colige, haver las mismas correspondencias en el triangulo quadrantal, ò que siendo obliquangulo, tiene un lado igual al quadrante, como OLN, que en el triangulo rectangulo; porque si el lado OL, que no es quadrante, se alarga hasta que lo sea, y se tira la basa MN, se hallarà todo lo sobredicho.

PROP.

PROP. XXVII. Theorema.

En el triangulo rectangulo, los lados que comprehenden el angulo recto son de la misma especie que los angulos opuestos. (fig. 33.)

SEan los tres triangulos OMN, LMN, PMN, rectangulos en M. Digo, que en el triangulo OMN, el lado OM, opuesto al angulo ONM, que se supone recto, es quadrante, y en el triangulo LMN, el lado LM, es menor que quadrante, por oponerse al angulo LNM, menor que recto; y en el triangulo PMN, el lado PM es mayor que quadrante, por oponerse al angulo PNM, mayor que recto.

Demonstr. En el triangulo OMN, por ser el angulo ONM recto, el lado ON tendrà su polo en MN; y MN en ON; (6.) y tambien por ser el angulo M recto, el lado OM tendrà su polo en MN; y MN en OM: luego el polo del arco MN, està en los arcos ON, y OM: luego es el punto O comun à entrambos: luego (*defin.* 2.) los arcos ON, y OM son quadrantes; y siendo el angulo O recto, su medida, que es el arco MN, tambien serà quadrante. De aqui se sigue, que en el triangulo LMN, el arco LM opuesto al angulo agudo LNM, es menos que el quadrante OM; y en el triangulo PMN, el lado PM opuesto al angulo obtuso PNM, es mayor que el quadrante OM.

COROLARIO.

DE aqui se colige, que en el triangulo esferico rectangulo, conocidos los angulos, se sabe de què especie sean los lados; y al contrario, conocidos èstos, se sabe la especie de aquellos: conque cessa toda la ambiguedad, que podia ocurrir en quanto à los lados. La proposicion siguiente, sirve para quitar la ambiguedad, en quanto à la hipotenusa.

PROP.

PROP. XXVIII. Theorema.

El triangnlo esferico rectangulo, tiene las propiedades siguientes.

1 S*I los dos lados que comprehenden el angulo recto, son quadrantes, ò à lo menos uno de ellos, la hipotenusa es quadrante.* En el triangulo MON, (*fig.* 32.) rectangulo en O, sean los lados OM, ON, quadrantes. Digo, que la hipotenusa MN, es quadrante; porque siendo dichos lados quadrantes, el punto O de su concurso, es polo de la hipotenusa MN; y èsta es medida del angulo O: (*defin.* 3.) luego siendo èste recto, serà la hipotenusa quadrante. Sea tambien el triangulo LON, rectangulo en O, cuyo lado ON, es quadrante. Digo, que la hipotenusa LN, es quadrante; porque como se ha demonstrado, MN, es tambien quadrante: luego el punto N, es polo del arco OLM: luego (*def.* 2.) NL es quadrante.

2 *Si en el triangulo hay dos angulos rectos, la hipotenusa es quadrante.* Porque haviendo dos angulos rectos, hay en cada uno de ellos un lado de los que los forman, opuesto à angulo recto: luego (27.) serà quadrante: y como la hipotenusa sea uno de los sobredichos lados, se sigue ha de ser quadrante.

3 *Si los dos lados que forman el angulo recto, son de una misma especie, y no fueren quadrantes, la hipotenusa serà menor que el quadrante.* Sea en la *fig.* 23. el triangulo HAL, rectangulo en A, y los lados AH, AL, sean entrambos menores que los quadrantes AB, AC. Digo, que la hipotenusa HL, es menor que quadrante; porque necessariamente es menor que BC, que (*num.* 1.) es quadrante. Por la misma razon, si los lados que forman el angulo recto A, son entrambos mayores que quadrante, como lo son AI, AG, en el triangulo IAG, la hipotenusa IG, es menor que quadrante, por ser menor que BC.

4 *Si los angulos formados sobre la hipotenusa son de una misma especie, pero no rectos, la hipotenusa serà menor que quadrante.* Digo, que en el triangulo AHL, (*fig.* 23.) por ser los angulos H, L, entrambos agudos, la hipotenusa HL, es menor que

que quadrante; porque siendo agudos los lados AH, AL, (27.) son menores que quadrantes: luego (*num.* 3.) la hipotenusa es menor que quadrante. Lo mismo se demuestra siendo ambos obtusos, como I, G, en el triangulo IAG, porque en esta suposicion, los lados son mayores que quadrante: luego la hipotenusa IG, (*num.* 3.) es menor que quadrante.

5 *Si los angulos sobre la hipotenusa fueren de diferente especie, sin ser ninguno de ellos recto, la hipotenusa serà mayor que quadrante, y lo mismo serà, si los lados fueren de diferente especie, y ninguno quadrante.* (*fig.* 21.) El triangulo LTX, rectangulo en X, tiene sobre la hipotenusa LT, los angulos L, y T, de diferente especie; esto es, L agudo, y T obtuso. Digo, que la hipotenusa LT, es mayor que quadrante, por ser necessariamente mayor que LS, que (*num.* 1.) es quadrante. Digo tambien, que por ser el lado XL, mayor que quadrante, y XT menor, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante: porque (27.) el angulo L, opuesto al lado XT, es agudo, y el angulo T, opuesto à LX, es obtuso: luego por la razon dicha, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante.

PROP. XXIX. Theorema.

En qualquiera triangulo rectangulo, los dos angulos son mas que 90. grad. Y qualquiera angulo obliquo es mayor que la diferencia del otro à los 90. grados. (*fig.* 21.)

EN el triangulo MTX, rectangulo en X, sus tres angulos, son mas que dos rectos: (21.) luego quitado el recto X, seràn los otros mas que un recto. Tambien el angulo T, con su complemento à 90. gr. hace un recto: luego siendo T, y M, mas que un recto, serà M, mas que el complemento, ò diferencia de T à los 90. grados. Sea tambien el triangulo LTX, rectangulo en X. Digo, que tambien se verifica lo mismo. En quanto à lo primero, no hay duda, por ser el angulo LTX obtuso. Para demonstrar lo segundo, continuados los lados, formese el triangulo MTX. En

En èste pues se ha demonstrado, que el angulo M es mayor que el complemento de MTX à 90. grados: pero la diferencia de MTX à los 90. grados, y la diferencia de LTX à los 90. grados, es la misma: luego porque L, y M son iguales, (4.) serà el angulo L mayor que la diferencia de LTX à los 90. grados.

Siempre que se quiera examinar, si un triangulo està bien dado, ò bien resuelto, tenganse presentes las proposiciones 21. 22. 27. 28. y 29.

CAPITULO IV.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos obliquangulos.

PAra resolver los triangulos esfericos obliquangulos, se usa muchas veces del *perpendiculo*, el qual no es otra cosa, que *un arco de circulo maximo, que en un triangulo desciende de uno de sus angulos perpendicularmente sobre el lado opuesto.*

PROP. XXX. Theorema.

En qualquiera triangulo obliquangulo, si los angulos sobre la basa son de una misma especie, la perpendicular del angulo vertical à la basa cae dentro del triangulo, y es de la misma especie que los dichos angulos; pero si estos angulos sobre la basa son de diferente especie, la perpendicular sobredicha cae fuera del triangulo, y es de la misma especie que el angulo externo. (*fig.* 31.)

EXplicacion. 1. En el triangulo YRZ, cuyos angulos Y, Z, son de una misma especie, entrambos agudos, digo, que la perpendicular RV cae dentro del triangulo, y es menor que el quadrante.

Demonstr. En el triangulo YVR rectangulo en V, la perpendicular RV es uno de los lados que forman el angulo recto: luego (27.) serà de la misma especie que el angu-