que quadrante; porque siendo agudos los lados AH, AL, (27.) son menores que quadrantes: luego (*num.* 3.) la hipotenusa es menor que quadrante. Lo mismo se demuestra siendo ambos obtusos, como I, G, en el triangulo IAG, porque en esta suposicion, los lados son mayores que quadrante: luego la hipotenusa IG, (*num.* 3.) es menor que quadrante.

5 *Si los angulos sobre la hipotenusa fueren de diferente especie, sin ser ninguno de ellos recto, la hipotenusa serà mayor que quadrante, y lo mismo serà, si los lados fueren de diferente especie, y ninguno quadrante.* (*fig.* 21.) El triangulo LTX, rectangulo en X, tiene sobre la hipotenusa LT, los angulos L, y T, de diferente especie; esto es, L agudo, y T obtuso. Digo, que la hipotenusa LT, es mayor que quadrante, por ser necessariamente mayor que LS, que (*num.* 1.) es quadrante. Digo tambien, que por ser el lado XL, mayor que quadrante, y XT menor, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante: porque (27.) el angulo L, opuesto al lado XT, es agudo, y el angulo T, opuesto à LX, es obtuso: luego por la razon dicha, la hipotenusa LT, es mayor que quadrante.

PROP. XXIX. Theorema.

En qualquiera triangulo rectangulo, los dos angulos son mas que 90. grad. Y qualquiera angulo obliquo es mayor que la diferencia del otro à los 90. grados. (*fig.* 21.)

EN el triangulo MTX, rectangulo en X, sus tres angulos, son mas que dos rectos: (21.) luego quitado el recto X, seràn los otros mas que un recto. Tambien el angulo T, con su complemento à 90. gr. hace un recto: luego siendo T, y M, mas que un recto, serà M, mas que el complemento, ò diferencia de T à los 90. grados. Sea tambien el triangulo LTX, rectangulo en X. Digo, que tambien se verifica lo mismo. En quanto à lo primero, no hay duda, por ser el angulo LTX obtuso. Para demonstrar lo segundo, continuados los lados, formese el triangulo MTX. En

En èste pues se ha demonstrado, que el angulo M es mayor que el complemento de MTX à 90. grados: pero la diferencia de MTX à los 90. grados, y la diferencia de LTX à los 90. grados, es la misma: luego porque L, y M son iguales, (4.) serà el angulo L mayor que la diferencia de LTX à los 90. grados.

Siempre que se quiera examinar, si un triangulo està bien dado, ò bien resuelto, tenganse presentes las proposiciones 21. 22. 27. 28. y 29.

CAPITULO IV.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS esfericos obliquangulos.

PAra resolver los triangulos esfericos obliquangulos, se usa muchas veces del *perpendiculo*, el qual no es otra cosa, que *un arco de circulo maximo, que en un triangulo desciende de uno de sus angulos perpendicularmente sobre el lado opuesto.*

PROP. XXX. Theorema.

En qualquiera triangulo obliquangulo, si los angulos sobre la basa son de una misma especie, la perpendicular del angulo vertical à la basa cae dentro del triangulo, y es de la misma especie que los dichos angulos; pero si estos angulos sobre la basa son de diferente especie, la perpendicular sobredicha cae fuera del triangulo, y es de la misma especie que el angulo externo. (*fig.* 31.)

E*Xplicacion.* 1. En el triangulo YRZ, cuyos angulos Y, Z, son de una misma especie, entrambos agudos, digo, que la perpendicular RV cae dentro del triangulo, y es menor que el quadrante.

Demonstr. En el triangulo YVR rectangulo en V, la perpendicular RV es uno de los lados que forman el angulo recto: luego (27.) serà de la misma especie que el angugulo opuesto Y; esto es, serà menor que el quadrante: luego en el triangulo RVZ rectangulo en V, siendo la perpendicular RU menor que quadrante, se opondrà a l angulo Z agudo, (27.) y no al externo obtuso RZF: luego dicha perpendicular cae dentro del triangulo.

2 En el triangulo MRO, cuyos angulos M, y O son obtusos, y por consiguiente de la misma especie, la perpendicular RG, por oponerse al angulo obtuso M, es (27.) mayor que quadrante: luego en el triangulo RGO, el angulo O, opuesto à dicha perpendicular, necessariamente ha de ser obtuso: luego cae dentro del triangulo entre los angulos M, y O.

3 En el triangulo RMY, cuyos angulos sobre la basa son de diferente especie; esto es, RMY agudo, y RYM obtuso; la perpendicular RU se opone al angulo RMY agudo: luego (27.) es menor que el quadrante: luego como por ser menor que quadrante no se pueda oponer al angulo obtuso RYM, que es el interno, se opondrà al angulo RYU agudo, que es el externo: luego cae fuera del triangulo.

PROP. XXXI. Theorema.

Si de un punto que no sea polo de la basa, baxan à ella dos arcos iguales, estos arcos distaràn igualmente del perpendiculo, y haràn con èl, angulos iguales; y al contrario. (fig. 34.)

Del punto R, que no es polo de la basa YUZ, baxan à ella los dos arcos RY, RZ iguales. Digo, que los arcos VY, VZ, que son las distancias del perpendiculo, son iguales, como tambien los angulos VRY, VRZ.

Demonstr. Los triangulos RUY, RVZ tienen los lados RY, RZ iguales, y el lado RV comun, y los angulos en V rectos iguales, y los Y, Z de una misma especie agudos: luego (19.) son totalmente iguales: luego los arcos VY, UZ son iguales; como tambien los angulos VRY, VRZ. Y al contrario, si las distancias VY, VZ son iguales, tambien

lo seràn los arcos RY, RZ: porque en este caso los triangulos YVR, ZVR, tienen los lados UY, VZ iguales, y VR comun; y los angulos en U rectos iguales: luego (10.) son del todo iguales; y por consiguiente, los lados RY, RZ son iguales, y tambien los angulos VRY, URZ. Lo mismo se convence en el triangulo HRT.

COROLARIO.

De aqui se colige, que en el triangulo esferico obliquangulo que fuere isoceles, ò que tuviere los angulos sobre su basa iguales, sus lados distaràn igualmente del perpendiculo, y haràn con èl angulos iguales.

PROP. XXXII. Theorema.

Si de un punto que no sea polo de la basa, baxan à ella dos arcos desiguales, el mayor arco dista mas del perpendiculo, y hace con èl mayor angulo que el menor, si los angulos sobre la basa fueren agudos; pero si fueren obtusos, el menor arco distarà del perpendiculo mas que el mayor, y harà con èl mayor angulo. (fig. 34.)

Del punto R, que no es polo de la basa YVS, baxan à ella los arcos RY, RS; y èste es mayor que aquèl: y los angulos Y, y S sobre la basa son agudos. Digo, que VS es mayor que VY; y el angulo VRS, es mayor que VRY.

Demonstr. Si VS no es mayor que VY, serà igual, ò menor. 1. No es igual, porque, como consta de la proposicion passada, serian RS, RY iguales, contra lo supuesto. 2. No es VS menor que VY; porque siendo YVS un mismo arco de circulo, y los angulos en V rectos, si se dobla el triangulo por la RV, el arco VS caerà sobre VPM: conque el punto S caerà sobre algun punto de la periferia VM; y no pudiendo caer en Y, como queda dicho, caerà, ò sobre Y, ò mas abaxo. No puede caer sobre Y, porque si esso es possible, cayga sobre O, y serà RO igual à RS. En el triangulo pues YOR, el angulo O es obtuso; porque siendo RV menor que quadrante, (*corolar. 3. prop. 6.*) el angulo UOR (27.) es agudo, como tambien Y: luego YOR es es obtuso: luego (14.) el lado YR opuesto al mayor angulo, serà mayor que el lado OR opuesto al menor; esto es, serà mayor que RS, contra lo supuesto: luego RS no puede caer mas arriba que RY: luego caerà debaxo como en RP: luego serà VP igual à VS, y el angulo VRP igual à VRS; siendo pues VP mayor que VY, serà VS mayor que VY; y siendo el angulo VRP mayor que URY, tambien lo serà el angulo VRS.

Digo tambien, que si del punto R, que no es polo de la basa MGT, descienden los arcos RT mayor, y RM menor, formando los angulos M, y T obtusos, el arco MG es mayor que GT, y el angulo MRG es mayor que GRT. Infierese de lo dicho, porque si de los semicirculos iguales SVM, VMG, quitamos el arco comun VM, quedaràn VS, MG iguales: y asimismo, si de los semicirculos YVT, VSG, quitamos el comun VT, quedaràn YV, GT iguales: luego siendo VS mayor que YV, serà MG mayor que GT. Amàs de esto, el angulo MRG es (3.) igual à su vertical opuesto VRS, y GRT à YRV: luego siendo VRS mayor que YRV, serà MRG mayor que GRT.

COROLARIO.

De aqui se colige, que en el triangulo obliquangulo, cuyos angulos sobre la basa son desiguales, y entrambos agudos, echado el perpendiculo, el mayor segmento de la basa, y por consiguiente el mayor angulo vertical es contermino al mayor lado del triangulo: y al contrario, si los angulos sobre la basa fueren obtusos, porque el punto de quien descienden los lados, y el perpendiculo, no es polo de la basa; porque si lo fuesse, serian entrambos lados quadrantes.

PROP. XXXIII. Theorema.

En el triangulo obliquangulo, que tiene dos angulos agudos, el lado opuesto al menor angulo es menor que el quadrante; y en el que tiene dos angulos obtusos, el lado opuesto al mayor angulo es mayor que el quadrante. (fig. 34.)

Sea el triangulo obliquangulo YRS, cuyos angulos Y, S, son agudos, y el angulo S, menor que Y. Digo, que el lado YR, opuesto al angulo menor S, es menor que el quadrante.

Demonstr. Porque el angulo Y, es mayor que el angulo S, serà (14.) el lado RS, opuesto à Y, mayor que RY, opuesto à S: luego por la antecedente, el perpendiculo RV, formarà el angulo vertical VRY, menor que el angulo VRS; y siendo el angulo YRS, (2.) menor que dos rectos, serà el angulo YRV, menor que un recto: y porque en el triangulo YVR, rectangulo en V, son los angulos VYR, VRY agudos; y por consiguiente de la misma especie es (28.) la hipotenusa YR, menor que quadrante: luego el lado YR, opuesto al angulo menor S, es menor que quadrante.

Con esto queda tambien probado, que en el triangulo MRT, cuyos angulos M, y T, son obtusos, el lado mayor RT, opuesto al angulo mayor M, es mayor que quadrante, por ser complemento al semicirculo del arco YR; y siendo este menor que quadrante, serà RT, mayor que quadrante.

PROP. XXXIV. Theorema.

En el triangulo esferico acutangulo, cada lado de por sì es menor que el quadrante. (fig. 31.)

Sea el triangulo ABC, cuyos tres angulos sean agudos. Digo, que cada lado es menor que el quadrante.

Demonstr. Porque los angulos B, y C, sobre la basa son agudos, el perpendiculo AD, (30.) cae dentro del triangulo: luego en el triangulo rectangulo DAC, por ser los angulos CAD, DCA, de la misma especie agudos, serà (28.) la hipotenusa AC, menor que el quadrante: luego el lado AC, es menor que el quadrante: lo mismo se demonstrarà del lado AB. Y tirando el perpendiculo del angulo C al lado AB, se convencerà de la misma suerte, que el lado CB, es menor que el quadrante: luego qualquiera lado es menor que el quadrante.

PROP.

PROP. XXXV. Theorema.

Los triangulos obliquangulos que tienen ſus tres lados mayores que el quadrante; ò el uno de ellos quadrante, y los demas mayores que el quadrante, tienen ſus angulos obtuſos. (*fig* 35.)

PAra mayor claridad, demonſtrarè el Teorema en diferentes caſos que pueden ocurrir.

Caſo 1. Si el triangulo es equilatero, y ſus tres lados mayores que el quadrante. Digo, que ſus tres angulos ſon obtuſos; porque ſiendo equilatero, por qualquier parte que ſe conſidere, ſerà iſoceles: luego (20.) ſus angulos ſeràn de la miſma eſpecie que ſus lados; y ſiendo èſtos mayores que el quadrante, ſeràn los angulos obtuſos.

Caſo 2. Sea el triangulo GHI, iſoceles, (*fig.* 35.) y ſus tres lados mayores que el quadrante. Digo, que ſus tres angulos ſon obtuſos. Que los angulos G, I, ſobre la baſa lo ſean, conſta de la *propoſ.* 20. Para demonſtrar que tambien lo es el angulo H, cortenſe GL, GN, iguales al quadrante, y tireſe el arco LNM, haſta que concurra con el lado IH, alargado en M.

Demonſtr. Por ſer GL, GN quadrantes, ſerà G polo del arco NL; y en el iſoceles NGL, los angulos N, y L (20.) ſeràn rectos; y el arco NL, que es medida del angulo obtuſo G, ſerà mayor que quadrante; y ſuponiendoſe tambien HI, mayor que quadrante, ſeràn los arcos NM, HN, menores que quadrante; y por conſiguiente, ambos juntos ſeràn menores que el ſemicirculo: luego (16.) el angulo recto N, es mayor que ſu interno opueſto NHM: luego el reſiduo NHI, es obtuſo.

Caſo 3. Sea el triangulo eſcaleno OPQ, y el lado PQ ſea mayor que PO: corteſe pues PR, igual à PO; y por conſiguiente, ſiendo, como ſe ſupone, PO, mayor que quadrante, tambien lo ſerà PR: luego por el caſo 2. el angulo POR ſerà obtuſo, y mucho mas lo ſerà POQ. De OP, OQ, mayores que quadrante, cortenſe OS, OT, iguales al quadrante; y tirando el arco STV, haſta encontrar al arco QP, alargado en V, ſeràn (20.) los angulos T, y S, rectos; y TS, medida del angulo obtuſo POQ, ſerà mayor que quadrante, como tambien lo es por ſupoſicion PQ: luego los arcos PV, TV, ſon menores que quadrante; y por conſiguiente, los dos juntos ſon menos que un ſemicirculo: luego (16.) el angulo externo T, que es recto, ſerà mayor que ſu interno, y opueſto TPV: luego ſu complemento TPQ, al ſemicirculo es obtuſo.

Caſo 4. Sea el triangulo iſoceles XVY, cuyos dos lados XU, XY, ſon iguales entre sì, y mayores que el quadrante; y el VY, ſea quadrante. Digo, que todos ſus angulos ſon obtuſos. Que lo ſean los angulos V, Y, ſobre la baſa, conſta de la *propoſ.* 20. Para probar, que tambien lo es el angulo VXY, corteſe VZ, igual al quadrante, y tireſe el arco YZ, &c. haſta que concurra con YX alargado, y ſerà V polo del circulo YZ, &; y los angulos en Z, ſeràn rectos; y el arco ZY, medida del angulo obtuſo V, ſerà mayor que quadrante; y por conſiguiente, los arcos X, &, Z, &, menores que quadrante, y entrambos juntos menos que un ſemicirculo: luego (16.) el angulo externo Z, que es recto, ſerà mayor que el interno opueſto ZX, &: luego èſte ſerà agudo, y por conſiguiente el reſiduo ZXY, ſerà obtuſo.

Caſo 5. En el triangulo ABC, ſon entrambos lados AB, AC, mayores que el quadrante, pero deſiguales, porque AC es mayor que AB; y BC ſea quadrante. Digo, que los tres angulos de eſte triangulo ſon obtuſos. Corteſe BD igual al quadrante; y deſde B, como polo, deſcrivaſe el arco CDE, haſta que concurra con CA, alargado en E. Corteſe tambien AF igual à AB, y tireſe el arco BF, y (20.) el angulo ABF ſerà obtuſo: luego mucho mas lo ſerà ABC. Tambien el angulo D es recto, y CD, medida del obtuſo ABC, es mayor que quadrante, como tambien AC: luego los arcos reſiduos AE, DE, ſon menores que quadrante, y juntos ſon menos que un ſemicirculo: luego (16.) el angulo externo D, que es recto, es mayor que el interno opueſto DAE: luego èſte es agudo: luego ſu complemento à dos rectos BAC, es obtuſo. Tambien ſe probarà ſer obtuſo el angulo ACB, porque ſiendo B polo de DC, ſerà el angulo BCD recto: luego BCF ſerà obtuſo: luego los tres ſon obtuſos.