LIBRO V.

DE LA RESOLUCION DE LOS Triangulos esfericos rectangulos.

EN los triangulos esfericos rectangulos, el lado opuesto al angulo recto, se llama *hipotenusa*. De los lados que comprehenden el angulo recto, el uno se llama *perpendiculo*, y el otro *basa*. El mismo que es basa, es tambien en otra suposicion perpendiculo, porque siendo estos dos lados, que forman el angulo recto, perpendiculares el uno al otro, si consideramos qualquiera de los dos como basa, el otro serà perpendiculo: considerasele como basa, quando le comparamos con el angulo contermino que forma con la hipotenusa; y como perpendiculo, quando le referimos à su angulo opuesto.

CAPITULO I.

THEOREMAS FUNDAMENTALES PARA LA RESOLUCION de los triangulos esfericos rectangulos.

TOda la resolucion de los triangulos esfericos rectangulos, se funda en la analogia, y proporcion de sus partes, la qual se demuestra en solos dos Theoremas, que son los siguientes.

PROP.

PROP. I. Theorema.

En los triangulos rectangulos, que tienen un mismo angulo agudo sobre la basa, los senos de las hipotenusas son proporcionales à los senos de los perpendiculos. (*fig.* 36.)

SEa ABDCA una octava parte de la esfera, cuyo centro es C: los arcos AB, AD, DB son quadrantes, que hacen unos con otros angulos rectos: conque A es el polo de DB; B es polo de AD; y D es polo de AB. Salga del punto D otro quadrante DE, y quedarà formado el triangulo esferico DEB. Baxe tambien desde A otro quadrante AFG, que cortando à DFE en F, y à DGB en G, formarà otro triangulo esferico DFG; y porque los angulos EBD, FGD son rectos, los dichos triangulos seràn rectangulos, y tienen el angulo EDB comun. La linea pues EL, perpendicular à la comun seccion, y radio CB, y que desciende del punto E, es el seno del arco EB, y es juntamente perpendicular al plano CBD. Asimismo la linea FI, perpendicular à la comun seccion, ò radio CG, es seno del arco FG: y en el plano DEC, el radio EC es seno todo, ò seno del quadrante ED; y la linea FH, perpendicular à la comun seccion CD, es seno del arco FD.

Esto supuesto, digo, que los senos de las hipotenusas DE, DF, son proporcionales con los senos de los arcos EB, FG, que son los perpendiculos; esto es, asi se ha CE, seno de la hipotenusa DE, con HF, seno de la hipotenusa DF, como EL, seno del perpendiculo EB, con FI, seno del perpendiculo FG.

Demonstr. Por ser las lineas EL, FI perpendiculares al mismo plano CBD, han de ser forzosamente paralelas; (6. 11. Eucl.) y asimismo las lineas EC, FH, por estàr en el mismo plano CED, y ser ambas perpendiculares à la misma linea CD, son entre sì paralelas: (29. 1. Eucl.) luego (10. 11. Eucl.) los angulos CEL, HFI, que constan de lineas paralelas, son iguales; y siendo rectos los angulos ELC, FIH, y por consiguiente iguales, seràn tambien los

 an-

angulos ECL, FHI iguales; y los dichos triangulos rectilineos feràn equiangulos: luego (4.6. Eucl.) feràn fus lados proporcionales.

Como CE, feno de la hipotenufa, ò arco ED,
à EL, feno del perpendiculo, ò arco EB;
afsi HF, feno de la hipotenufa, ò arco FD,
à FI, feno del perpendiculo, ò arco FG.

Y alternando, invirtiendo, &c.

PROP. II. Theorema.

En los mifmos triangulos rectangulos, los fenos de las bafas fon proporcionales con las tangentes de los perpendiculos. (*fig.* 36.)

Explicacion. Sea la linea MB perpendicular al radio CB, y tirada la fecante CM, ferà MB tangente del perpendiculo EB. Afsimifmo fea KG perpendicular al radio CG, y tirada la fecante CK, ferà KG tangente del perpendiculo FG. Tambien por fer BC perpendicular à CD, es feno de la bafa DB; y tirada GN tambien perpendicular à CD, es feno de la bafa GD. Digo pues, que fon proporcionales CB, feno de la bafa DB, à BM, tangente del perpendiculo EB; como NG, feno de la bafa DG, à GK, tangente del perpendiculo FG.

Demonftr. Por eftàr EL, MB en un mifmo plano, y fer perpendiculares à CB, feràn entre sì paralelas. (29.1.Euc.) Y afsimifmo, por fer FI, KG perpendiculares à CG, fon tambien entre sì paralelas: luego (6. 11.) MB, KG fon paralelas. Tambien por fer BC, y GN perpendiculares à CD, fon entre sì paralelas: y fiendo los angulos NGK, CBM rectos iguales, y paralelos, feràn los planos NGK, CBM paralelos; y cortando el plano DEC los planos fobredichos, las comunes fecciones CM, NK feràn paralelas, y los angulos MCB, KNG paralelos, è iguales, como tambien los angulos M, y K: (16.11.Eucl.) luego los triangulos CBM, NGK fon equiangulos; y (4.6. Eucl.) fus lados homologos feràn proporcionales.

Co-

Como CB feno de la bafa BD,
à BM tangente del perpendiculo EB;
afsi NG feno de la bafa GD,
à GK tangente del perpendiculo FG.

Y alternando, invirtiendo, &c.

CAPITULO II.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS ESFERICOS rectangulos.

De los dos Theoremas que fe han demonftrado en el capitulo paffado, fe infiere la refolucion de los triangulos esfericos rectangulos; pero antes de entrar en ella, ferà conveniente hacer reflexion fobre las obfervaciones figuientes.

OBSERVACIONES.

1 Si uno de los lados que comprehenden el angulo recto, es quadrante, el angulo opuefto à dicho lado es recto; fi es menor que quadrante, es agudo; y fi mayor, obtufo; y al contrario. *Prop.* 27. *lib.* 4.

2 Si los lados que forman el angulo recto, ò à lo menos uno de ellos, es quadrante, la hipotenufa tambien ferà quadrante: fi entrambos fon mayores, ò entrambos menores que el quadrante, la hipotenufa ferà menor que el quadrante; pero fi uno de dichos lados es mayor, y el otro menor que el quadrante, la hipotenufa ferà mayor que el quadrante; y al contrario. *Prop.* 28. *lib.* 4.

3 Si uno de los angulos adyacentes à la hipotenufa fuere recto, la hipotenufa ferà quadrante: fi ambos fueren agudos, ò obtufos, la hipotenufa ferà menor que el quadrante; y fi uno fuere agudo, y el otro obtufo, ferà la hipotenufa mayor que el quadrante; y al contrario. *Inferefe de las antecedentes obfervaciones.*

4 Los tres angulos de qualquiera triangulo esferico fon mayores que dos rectos, y menores que feis. *Propoficion* 21. *lib.* 4.

5 Siem-

5 Siempre que en la proporcion entrare la hipotenusa, ò como conocida, ò como buscada, se funda la resolucion en el Theorema 1. por ser la proporcion de seno à seno; pero quando la hipotenusa no entrare en la proporcion, si otro lado, se fundarà la analisi en el Theorema 2. por ser entonces la proporcion de seno à tangente, ù de tangente à seno.

6 Conviene advertir, que en cada resolucion se forman dos triangulos con un angulo comun, como en la *fig.* 36. Los dos triangulos son DEB, DFG, que tienen el angulo comun D; en los quales se ve claramente, que el uno, que es DEB, siempre tiene la hipotenusa, y basa quadrantes, como lo son DE, DB, y à este llamamos *triangulo principal*; y al otro *triangulo proporcional*.

7 En todas las resoluciones dispondrèmos los terminos de la proporcion, de la misma suerte que en los triangulos rectilineos, esto es, en lugar del logarithmo primero, tomarèmos su complemento logarithmico; y la suma de los tres, menos el radio, serà el logarithmo del quarto termino que se busca. Quando el primer termino fuere tangente mayor que el radio, esto es, fuere tangente de arco mayor que 45. grados, se tomarà su complemento al duplo radio, el qual duplo se quitarà de la suma para tener el logarithmo del quarto termino, que se busca. Quitase el radio, omitiendo, ò quitando una unidad à la izquierda de la suma; y restase el duplo radio, quitando 2. de alli mismo, como en otra parte queda dicho.

PROP. III. Problema.

Dado un angulo obliquo, y el lado contermino à dicho angulo, hallar el otro angulo. (fig. 38.)

EN el triangulo DFG rectangulo en G, dado el angulo F 72. gr. 25. min. y el lado contermino FG 37. gr. 21. min. se busca el angulo D.

Pro-

Proporcion. Prop. 1.	*Logarithmos.*
Como el radio	C.L. 0.0000000.
al seno del angulo F 72. gr. 25. min.	9.9792198.
assi el seno segundo del lado FG 37. gr. 21. m.	9.9003367.
al seno segundo del angulo D 40. gr. 44. m.	9.8795565.

Demonstr. Supongase en la *fig.* 37. el mismo triangulo DFG descrito en la superficie de la esfera VDBT; y desde D, como polo, descrivase el arco REB; y desde F, el arco RQP; y continuese el arco GF, y serà GQT. De que se sigue, que QP es medida del angulo QFP; conque tambien lo serà de su vertical opuesto DFG; y porque GA es quadrante, por ser A polo de DGB, serà FA complemento del lado GF, como tambien por la misma razon serà AE complemento del arco EB, medida del angulo D; conque AE es complemento del angulo D. Esto supuesto, en los triangulos FQP, FAE, son proporcionales. (1.)

Como el seno del quadrante FQ, que es el radio,
al seno de QP, que lo es del angulo F;
assi el seno 1. de FA, que lo es segundo de FG,
al seno de AE, que lo es 2. de EB, ù del angulo D.

PROP. IV. Problema.

Dado un lado, y el angulo opuesto à dicho lado, hallar el otro angulo. (fig. 39.)

P*Ara esta resolucion es menester conocer antes, si el angulo que se busca ha de ser agudo, ò obtuso, lo qual se conocerà por la observacion 1. y 3. conociendo si la hipotenusa, ò el otro lado es mayor, ò menor que el quadrante. Porque siendo este lado mayor que el quadrante, el angulo que se busca serà obtuso; y siendo menor, serà agudo. (27.4.) Tambien si el lado dado es mayor, ò menor que el quadrante, y la hipotenusa fuere menor que el quadrante, el otro lado serà de la misma especie que el lado dado; pero si la hipotenusa fuere mayor que el quadrante, el sobredicho lado serà de especie opuesta al lado dado, como se dixo en las observaciones antecedentes.*

En

En el triangulo DFG, rectangulo en G, dado el lado FG, 23.gr. 17.min. y el angulo opuesto D, 32.gr. 54.min. se busca el angulo F, el qual se supone ha de ser agudo.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno 2. de FG	23.g.17.m.	C. L. 0.0368918.
al radio;	90.g.	10.0000000.
asi el seno 2. del ang. D	32.g.54.m.	9.9240827.
al seno 1. del ang. F	66.g. 4.m.	9.9609745.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales (1.) el seno 1. de FA, que es seno 2. de GF, al seno del quadrante FQ, que es el radio; como el seno 1. de AE, que es segundo de EB, ù del angulo D, al seno 1. de QP, ù del angulo AFE, ù de DFG su igual.

PROP. V. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo opuesto à este lado. (*fig.* 40.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF, 50.gr. 20.min. y el lado GF, 30.gr. 25.m. se busca el angulo D, opuesto al lado FG.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el seno de la hipot. DF	50.g. 20.m.	C. L. 0.1136384.
al radio;	90.g.	10.0000000.
asi el seno del lado FG	30.g.25.m.	9.7043947.
al seno del angulo D	41.g. 8.m.	9.8180331.

Demonstr. (*fig.* 37.) La medida del angulo D es EB; y (1.) son proporcionales el seno de la hipotenusa DF, al seno de la hipotenusa DE, que es el radio, por ser DE quadrante; como el seno del perpendiculo FG, al seno del perpendiculo EB, que es seno del angulo D, por ser EB su medida.

PROP.

PROP. VI. Problema.

Dados los lados, hallar qualquiera angulo obliquo. (*fig.* 41.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dado el lado DG, 59. gr. 22. min. y el lado FG, 33. gr. 44. min. se busca el angulo D, opuesto al lado FG.

Proporcion. Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como el seno del lado conter. DG	59.g.22.m.	C.L. 0.0652765.
al radio;	90.	10.0000000.
asi la tang. del lado opuesto GF	33.g.44.m.	9.8246191.
à la tangente del angulo D	37.g.49.m.	9.8898956.

Demonstr. En los triangulos DFG, DEB, (*fig.* 36.) son proporcionales (2.) el seno del lado contermino DG, al seno del arco DB, que es el radio; como la tangente GK, del lado FG, à la tangente BM del arco BE, que siendo este medida del angulo D, serà BM tangente del mismo angulo D. De la misma suerte se hallarà el angulo F.

PROP. VII. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el angulo intermedio. (*fig.* 42.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF, 50.gr. 20.min. y el lado FG, 30. gr. 25. min. se busca el angulo F intermedio.

Proporcion. Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como la tang. de la hipot. DF	50.g.20.m.	C.L. 9.9186769.
à la tangente del lado FG;	30.g.25.m.	9.7687029.
asi el radio	90.	10.0000000.
al seno 2. del angulo F	60.g.52.m.	9.6873798.

Aqui se ve, que la suma de los tres, menos el duplo radio, es el logarithmo que se busca.

De-

Demonstr. En la *fig.*37. es DFG el triangulo propuesto, y hecha la descripcion que se dixo en la *prop.* 3. es QP, medida del angulo QFP; y por consiguiente, de su igual DFG; conque QR, es el complemento del angulo DFG; y porque GA, FQ, son quadrantes iguales, quitado el arco FA comun, quedaràn GF, AQ iguales; y assimismo, por ser tambien quadrantes DE, FP, si se quita FE comun, son DF, EP iguales. En los triangulos pues RPE, RQA, son (2.) proporcionales las tangentes de los perpendiculos, con los senos de las basas, la tangente del perpendiculo EP, ù DF su igual, à la tangente del perpendiculo AQ, ò GF su igual: assi el seno de la basa RP, que es el radio, al seno de la basa RQ, que es seno segundo de QP, ù del angulo DFG, cuya medida es QP.

PROP. VIII. Problema.

Dada la Hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el otro angulo. (fig. 43.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF 63. gr. 45. min. y el angulo F 61. gr. 35. min. se busca el angulo D.

Proporcion, Prop. 2.		*Logarithmos.*
Como el radio.	90.	C.L. 0.0000000.
al seno 2. de la hipot. DF	63.g.45.m.	9.6457058.
assi la tang. del angulo F	61.g.35.m.	10.2667434.
à la tang. 2. del ang. D	50.g.44.m.	9.9124492.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales, (2.) como el seno de la basa FP, que por ser quadrantes es el radio, al seno de FE, que es seno 2. de la hipotenusa DF: assi la tangente del arco QP, ù del angulo F, cuya medida es QP, à la tangente del arco AE, que es tangente 2. del angulo D, por ser AE complemento de EB, medida del angulo D.

PROP.

PROP. IX. Problema.

Dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el lado opuesto à este angulo. (fig. 44.)

EN el triangulo DFG, dada la hipotenusa DF 52. gr. 33. min. y el angulo D 40. gr. 58. min. se busca el lado opuesto FG.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*
Como el radio	90.gr.	C.L. 0.0000000.
al seno del angulo D	40.gr.58.m.	9.8166521.
assi el seno de la hipoten. DF	52.gr.33.m.	9.8997572.
al seno del lado opuesto FG	31.gr.22.m.	9.7164093.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa DE, que es el radio, al seno del perpendiculo EB, que lo es del angulo D, por ser ED su medida: assi el seno de la hipotenusa DF, al seno del lado FG.

PROP. X. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado. (fig. 40.)

EN el triangulo DFG dada la hipotenusa DF 50. gr. 20. min. y el lado FG 30. gr. 25. min. se busca el lado DG.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr. m.*	*Logarithmos.*
Como el seno 2. de FG	30. 25.	C.L. 0.0643082.
al radio	90.	10.0000000.
assi el seno 2. de la hipot. DF	50. 20.	9.8050385.
al seno 2. del lado DG	42. 15.	9.8693467.

Demonstr. (*fig.*37.) En los triangulos AGB, y AFE, son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa AF, que es seno 2. de FG, al seno de la hipotenusa AG, que es el radio: assi el seno del perpendiculo FE, que lo es segundo de la hipot. DF, al seno del perpendiculo GB, que es seno 2. del lado DG.

PROP.

Demonstr. En la *fig.* 37. es DFG el triangulo propuesto, y hecha la descripcion que se dixo en la *prop.* 3. es QP, medida del angulo QFP; y por consiguiente, de su igual DFG; conque QR, es el complemento del angulo DFG; y porque GA, FQ, son quadrantes iguales, quitado el arco FA comun, quedaràn GF, AQ iguales; y assimismo, por ser tambien quadrantes DE, FP, si se quita FE comun, son DF, EP iguales. En los triangulos pues RPE, RQA, son (2.) proporcionales las tangentes de los perpendiculos, con los senos de las basas, la tangente del perpendiculo EP, ù DF su igual, à la tangente del perpendiculo AQ, ò GF su igual: assi el seno de la basa RP, que es el radio, al seno de la basa RQ, que es seno segundo de QP, ù del angulo DFG, cuya medida es QP.

PROP. VIII. Problema.

Dada la Hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el otro angulo. (*fig.* 43.)

EN el triangulo DFG, rectangulo en G, dada la hipotenusa DF 63. gr. 45. min. y el angulo F 61. gr. 35. min. se busca el angulo D.

Proporcion, Prop. 2.		*Logarithmos.*	
Como el radio.	90.	C.L.	0.0000000.
al seno 2. de la hipot. DF	63.g.45.m.		9.6457058.
assi la tang. del angulo F	61.g.35.m.		10.2667434.
à la tang. 2. del ang. D	50.g.44.m.		9.9124492.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, son proporcionales, (2.) como el seno de la basa FP, que por ser quadrantes es el radio, al seno de FE, que es seno 2. de la hipotenusa DF: assi la tangente del arco QP, ù del angulo F, cuya medida es QP, à la tangente del arco AE, que es tangente 2. del angulo D, por ser AE complemento de EB, medida del angulo D.

PROP.

PROP. IX. Problema.

Dada la hipotenusa, y un angulo obliquo, hallar el lado opuesto à este angulo. (*fig.* 44.)

EN el triangulo DFG, dada la hipotenusa DF 52. gr. 33. min. y el angulo D 40. gr. 58. min. se busca el lado opuesto FG.

Proporcion. Prop. 1.		*Logarithmos.*	
Como el radio	90.gr.	C.L.	0.0000000.
al seno del angulo D	40.gr.58.m.		9.8166521.
assi el seno de la hipoten. DF	52.gr.33.m.		9.8997572.
al seno del lado opuesto FG	31.gr.22.m.		9.7164093.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa DE, que es el radio, al seno del perpendiculo EB, que lo es del angulo D, por ser ED su medida: assi el seno de la hipotenusa DF, al seno del lado FG.

PROP. X. Problema.

Dada la hipotenusa, y un lado, hallar el otro lado. (*fig.* 40.)

EN el triangulo DFG dada la hipotenusa DF 50. gr. 20. min. y el lado FG 30. gr. 25. min. se busca el lado DG.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr. m.*		*Logarithmos.*
Como el seno 2. de FG	30. 25.	C.L.	0.0643082.
al radio	90.		10.0000000.
assi el seno 2. de la hipot. DF	50. 20.		9.8050385.
al seno 2. del lado DG	42. 15.		9.8693467.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos AGB, y AFE, son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa AF, que es seno 2. de FG, al seno de la hipotenusa AG, que es el radio: assi el seno del perpendiculo FE, que lo es segundo de la hipot. DF, al seno del perpendiculo GB, que es seno 2. del lado DG.

PROP.

PROP. XI. Problema.

Dados los angulos, hallar qualquiera lado. (fig. 45.)

DAdos los angulos D, 45. gr. 30. m. y F, 60. gr. 18. m. en el triangulo DFG, ſe buſca el lado FG.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el ſeno 1. del ang. F conterm.	60.	18.	C.L. 0.0611644.
al ſeno 2. del ang. D opueſto;	45.	30.	9.8456618.
aſsi el radio	90.		10.0000000.
al ſeno 2. del lado FG	36.	12.	9.9068262.

Demonſtr. (*fig.* 37.) En los triangulos FQP, FAE, ſon proporcionales (1.) el ſeno 1. de QP, ù del angulo F, al ſeno 1. de AE, que lo es ſegundo de EB, ù del angulo D: aſsi el ſeno del quadrante FQ, que es el radio, al ſeno 1. de FA, que lo es ſegundo del lado FG.

PROP. XII. Problema.

Dado un lado, y un angulo contermino, hallar el otro lado. (fig. 46.)

EN el triangulo DFG, es dado el lado DG 67. gr. 51. m. y el angulo contermino D 28. gr. 22. m. y ſe buſca el lado FG opueſto al angulo dado D.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C.L. 0.0000000.
al ſeno del lado DG	67.	51.	9.9667048.
aſsi la tang. del angulo D	28.	22.	9.7323506.
à la tan. del lado opueſto FG	26.	34.	9.6990554.

Demonſtr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG ſon proporcionales (2.) como el ſeno de DB, que es el radio, al ſeno del lado DG: aſsi la tangente de EB, ù del angulo D, à la tangente del lado FG.

PROP.

PROP. XIII. Problema.

Dado un lado, y un angulo opueſto, hallar el otro lado. (fig. 39.)

PAra eſta reſolucion, es meneſter ſaber, ſi el lado que ſe buſca es mayor, ò menor que el quadrante; lo que ſe inferirà, ſabiendo ſi la hipotenuſa es mayor, ò menor que el quadrante, ò ſi el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuſo, ſegun las obſervaciones arriba pueſtas. En el triangulo DFG, dado el lado FG, 23. gr. 17. m. y el angulo opueſto D, 32. gr. 54. m. ſe buſca el lado DG.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como la tangente del angulo D	32.	54.	C.L. 0.1891434.
à la tang. del lado opueſto FG	23.	17.	9.6337948.
aſsi el radio	90.		10.0000000.
al ſeno del lado DG	41.	42	9.8229382.

Demonſtr. (*fig.* 36.) En los triangulos DEB, DFG ſon proporcionales (2.) la tangente de EB, ù del angulo D, à la tangente del lado FG; como el ſeno del quadrante DB, ò el radio, al ſeno del lado DG.

PROP. XIV. Problema.

Dada la hipotenuſa, y un angulo obliquo, hallar un lado contermino à eſte angulo. (fig. 43.)

EN el triangulo DFG ſe da la hipotenuſa DF 63. gr. 45. m. y el angulo F 61. gr. 35. m. y ſe buſca el lado FG contermino al angulo dado.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90		C.L. 0.0000000.
al ſeno 2. del angulo F	61.	35.	9.6774975.
aſsi la tangente de la hipot. DF	63.	45.	10.3070250.
à la tang. del lado FG.	43.	59.	9.9845225.

De-

Demonstr. Por ser (*fig.* 37.) DE, EF quadrantes, segun la descripcion hecha en la *prop.* 3. si les quitamos el arco FE comun, quedaràn DF, EP iguales: asimismo, si à los quadrantes GA, FQ les quitamos el arco FA comun, quedaràn GF, AQ iguales. Esto supuesto, en los triangulos RPE, RQA son (2.) proporcionales, el seno de la basa RP, que es el radio, al seno del arco RQ, que lo es segundo del arco QP, ù del angulo F, su medida; asi la tangente del arco EP, ù de la hipotenusa DF, su igual, à la tangente AQ, ù de su igual FG.

PROP. XV. Problema.

Dados los angulos, hallar la hipotenusa. (*fig.* 45.)

EN el triangulo DFG se suponen conocidos los angulos F 60. gr. 18. m. y D 45. gr. 30. m. y se busca la hipotenusa DF.

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como la tang. 1. *del angulo* F	60.	18.	C. L. 9.7561718.
à la tang. 2. *del angulo* D	45.	30.	9.9924197.
asi el radio	90.		10.0000000.
al seno 2. *de la hipot.* DF	55.	54.	9.7485915.

Demonstr. En los triangulos FQP, FAE (*fig.* 37.) son proporcionales (2.) como la tangente 1. del arco QP, ù del angulo F, à la tangente 1. del arco AE, que es segunda del arco EB, ù del angulo D: asi el seno del quadrante FP, que es el radio, al seno primero de FE, que lo es segundo de la hipotenusa DF.

PROP. XVI. Problema.

Dados dos lados, hallar la hipotenusa. (*fig.* 41.)

EN el triangulo DFG dado el lado DG 59. gr. 32. m. y el lado FG 33. gr. 44. min. se busca la hipotenusa DF.

Pro-

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C. L. 0.0000000.
al seno 2. *del lado* FG	33.	44.	9.9199308.
asi el seno 2. *del lado* DG	59.	22.	9.7071801.
al seno 2. *de la hipot.* DF	64.	56.	9.6271109.

Demonstr. (*fig.* 17.) En los triangulos AGB, AFE, son proporcionales (1.) el seno de la hipotenusa AG, que es el radio, al seno 1. de AF, que es seno 2. de FG: como el seno 1. de GB, que lo es segundo de DG, al seno 1. de FE, que lo es segundo en la hipotenusa DF.

PROP. XVII. Problema.

Dado un lado, y el angulo opuesto à esse lado, hallar la hipotenusa. (*fig.* 39.)

P*Ara esta resolucion es menester saber, si la hipotenusa, ò el otro lado es mayor, ò menor que el quadrante; ò si el otro angulo obliquo es agudo, ò obtuso, lo que se sabrà por las observaciones puestas al principio de este Capitulo.* En el triangulo DFG, dado el lado FG, 23. gr. 17. m. y el angulo opuesto D, 32. gr. 54. m. se busca la hipotenusa DF, que suponemos, ha de ser menor que el quadrante.

Proporcion. Prop. 1.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el seno del angulo D	32.	54.	C. L. 0.2650607.
al seno del lado FG	23.	17.	9.5969029.
asi el radio	90.		10.0000000.
al seno de la hipot. DF	46.	42.	9.8619636.

Demonstr. (*fig.* 37.) En los triangulos DEB, DFG, son proporcionales (1.) como el seno de EB, ù del angulo D, al seno de FG: asi el seno del quadrante DE, que es el radio, al seno de la hipotenusa DF.

PROP. XVIII. Problema.

Dado un lado, y el angulo adyacente à dicho lado, hallar la hipotenusa. (*fig.* 46.)

EN el triangulo DFG, se dà el lado DG, 67. gr. 51. m. y el angulo adyacente D, 28. gr. 22. m. y se pide la hipotenusa DF.

Pro-

Proporcion. Prop. 2.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el radio	90.		C. L. 0.0000000.
al ſeno 2. del angulo D	28.	22.	9.9444457.
aſsi la tang. 2. del lado DG	67.	51	9.6096742.
à la tang. 2. de la hipot. DF	70.	18.	9.5541199.

Demonſtr. (*fig.* 37.) En los triangulos AGB, AFE, ſon proporcionales (2.) como el ſeno del quadrante AB, que es el radio, al ſeno 1. de AE, que lo es ſegundo de EB, ù del angulo D; aſsi la tangente 1. de BG, que lo es ſegunda de DG, à la tangente 1. de EF, que lo es ſegunda de la hipotenuſa FD.

PROP. XIX. Problema.

Modo de reſolver los triangulos quadrantales.

T*Riangulos quadrantales*, como en otra parte dixe, ſon aquellos que tienen un lado quadrante de 90. grados, y no ſon rectangulos. El modo de reſolver eſtos triangulos, es, mudar los lados en angulos, y los angulos en lados, con que queda formado otro triangulo, que es rectangulo, el qual reſuelto, queda reſuelto el primero; y como dicho ſegundo triangulo ſea rectangulo, ſe reſolverà por aquel problema de los ſobredichos, à quien perteneciere.

La razon de eſto es, porque como demonſtrè en la *prop.* 25. del lib. antecedente, en los polos de qualquiera triangulo eſferico, ſe forma otro, cuyos angulos ſon complemento de los lados del primero al ſemicirculo; y los lados, de los angulos: luego teniendo el triangulo quadrantal un lado de 90. grados, el triangulo formado en ſus polos tendrà un angulo recto; y por conſiguiente ſerà rectangulo: y como los complementos al ſemicirculo tengan los miſmos ſenos, y tangentes que los arcos de quien ſon complementos, baſtarà convertir los lados en angulos, y los angulos en lados: y aunque eſto es bien claro, para mayor facilidad propongo el exemplo ſiguiente.

Sea dado el triangulo AEB, (*fig.* 47.) en quien ſe ſuponen

nen conocidos el lado EB, 55.gr. 54.min. el lado BA, 53.gr. 48.m. y el lado, ò baſa EA ſea quadrante 90. gr. Pideſe el angulo A, opueſto al lado mayor EB. *Operacion.* Convierto los lados en angulos, y ſupongo que dados los tres angulos buſco el lado mayor; y procediendo por la *propoſ.* 11. diſpongo la proporcion en la forma ſiguiente, uſando del nombre de *lados*, donde alli deciamos *angulos*; y del nombre de *angulos*, donde alli deciamos *lados*.

Proporcion.	*Gr.*	*m.*	*Logarithmos.*
Como el ſeno 1. de BA lado cont.	53.	48.	C.L.0.0931478.
al ſeno 2. de BE lado opueſto;	55.	54.	9.7486833.
aſsi el radio,	90.	0.	10.0000000.
al ſeno 2. del angulo A.	46.	0.	9.8418311.

LIBRO VI.

DE LA RESOLUCION DE los triangulos eſfericos obliquangulos.

LA mayor parte de los triangulos eſfericos obliquangulos ſe reſuelve, reduciendo el triangulo dado à dos triangulos rectangulos, lo que ſe hace tirando de ſu vertice el *perpendiculo* à la baſa, el qual no es otra coſa que un arco de circulo maximo, que deſciende del vertice perpendicularmente ſobre la baſa del triangulo. Demonſtrarè en los dos primeros capitulos de eſte libro los Theoremas principales en que ſe funda la reſolucion de dichos triangulos, que ſe explicarà deſpues en el tercero.